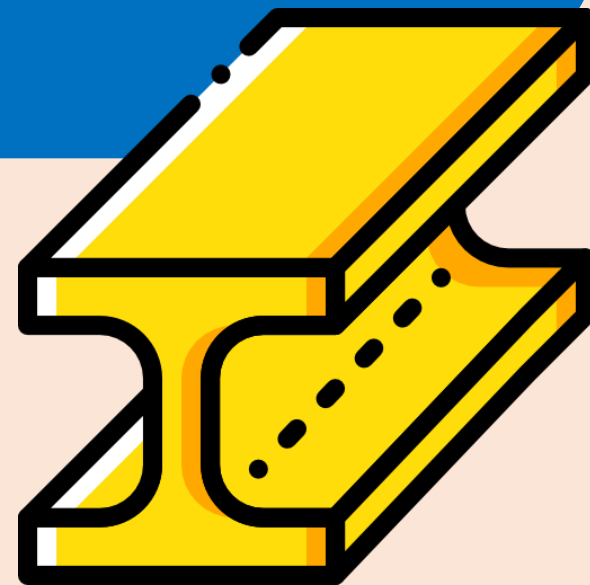
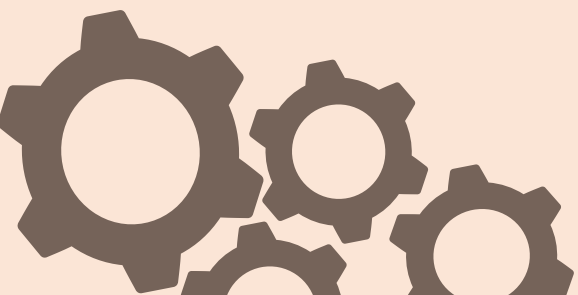
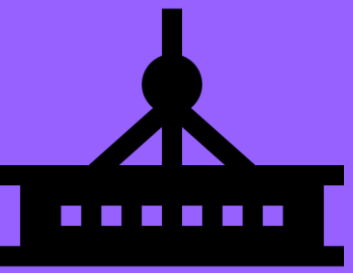




5

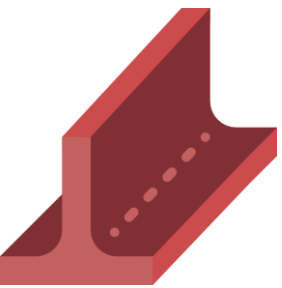
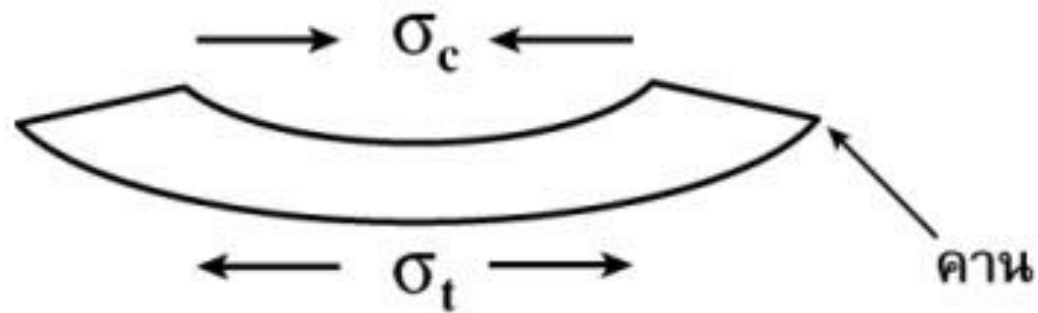
ความเค้นดัดในคาน

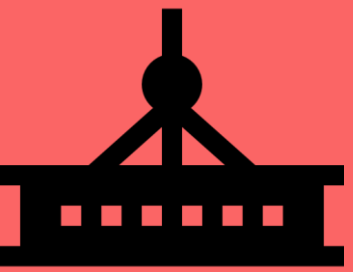




การหาตำแหน่งของแนวแกนสะเทิน

โดยทั่วไปคานเมื่ออยู่ภายใต้โมเมนต์ดัด (Bending Moment) ที่มีค่าคงที่ เรียกว่าอยู่ภายใต้ความเค้นดัดล้วน (Pure Bending) ซึ่งจะทำให้คานโก่งงอเล็กน้อย บริเวณด้านบนของคานจะหดลงจึงมีความเค้นอัดเกิดขึ้น และบริเวณด้านล่างของคานจะยืดออกก็จะเกิดความเค้นดึงเกิดขึ้น ดังรูป





การหาตำแหน่งของแนวแกนสะเทิน

ข้อสมมติฐานการหาค่าความเค้นดัดที่เกิดขึ้นในคาน

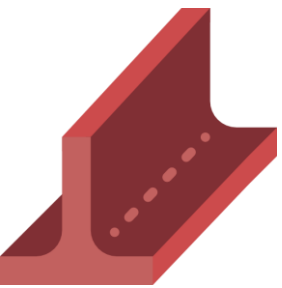
1. คานจะต้องมีลักษณะตรงอยู่เสมอ

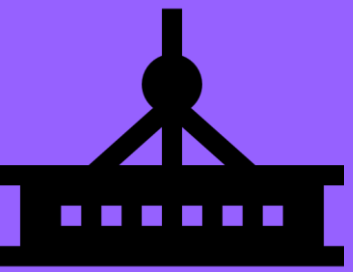
2. วัสดุที่ใช้ทำคานจะต้องเป็นเนื้อเดียวกัน และต้องมีคุณสมบัติในการยืดหยุ่นสม่ำเสมอตลอดความยาวของคาน

3. ความเค้นที่เกิดขึ้นต้องมีขนาดไม่เกินค่าขีดจำกัดความยืดหยุ่นของคาน

4. ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นสำหรับความเค้นอัดและความเค้นดึงในคานจะต้องเท่ากัน

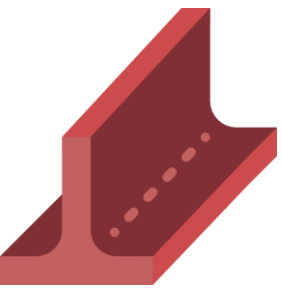
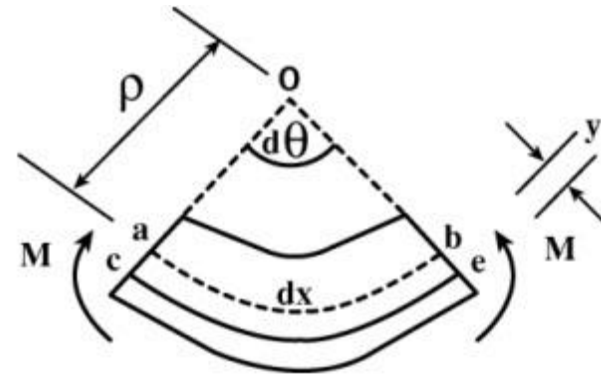
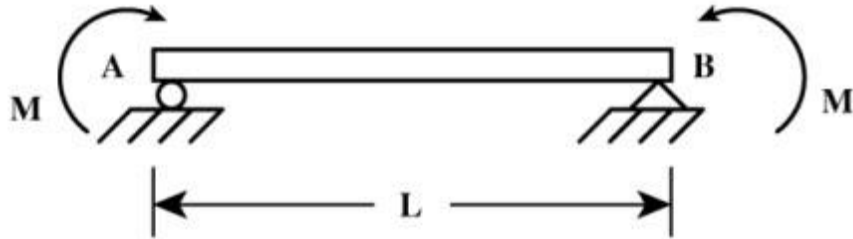
5. หน้าตัดของคานจะต้องมีขนาดคงที่เสมอ ทั้งก่อนและหลังการเกิดความเค้น

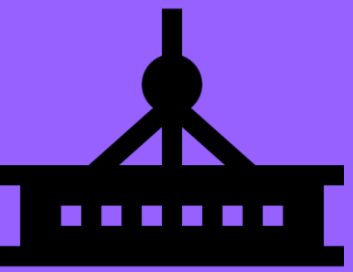




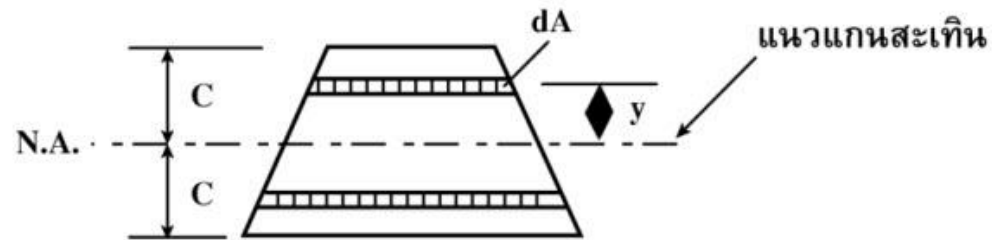
การหาตำแหน่งของแนวแกนสะเทิน

คานที่มีโมเมนต์ดัดมากระทำที่ปลายทั้งสองข้าง ดังรูป พิวด้านบนของคานจะเกิดความเค้นอัดและด้านล่างจะเกิดความเค้นดึงแต่ในชั้นระหว่างผิวบนและผิวล่างของคานจะไม่มี การยืดหรือหดตัวเกิดขึ้น ความเค้นที่เกิดขึ้นในจุดนี้จะมีค่าเป็นศูนย์ จุดนี้เรียกว่า แนวแกนสะเทิน (Neutral Axis ; N.A.)





การหาตำแหน่งของแนวแกนสะเทิน

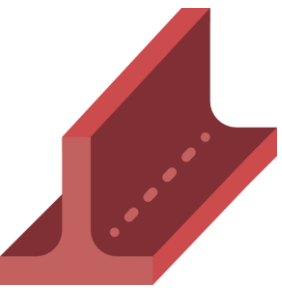


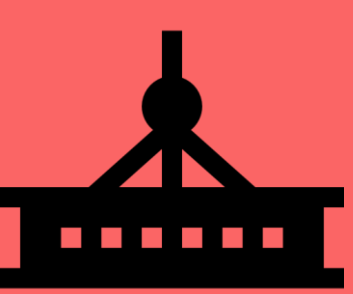
ถ้าให้ C เป็นระยะจากแนวแกนสะเทินของหน้าตัดนั้น ไปยังขอบบนสุดและล่างสุดของหน้าตัดของคาน ดังรูป ความเค้นดัดที่เกิดขึ้นในคานสามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\sigma = \frac{MC}{I}$$

เมื่อ

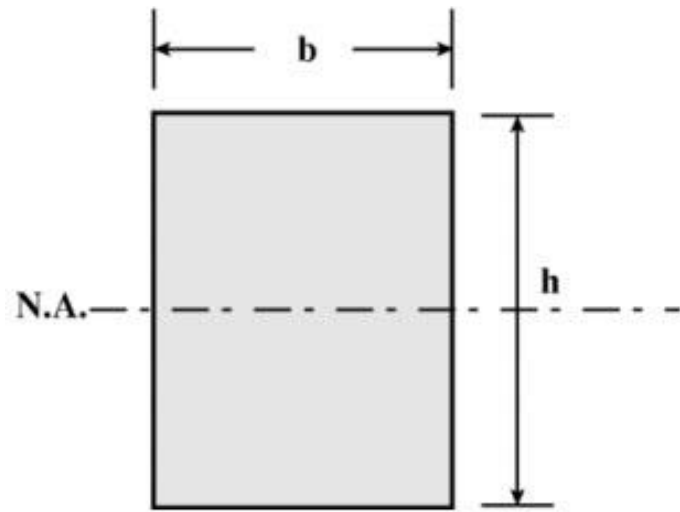
- M = โมเมนต์ดัดในคาน (N-m)
- σ = ความเค้นดัดในคาน (MN/mm^2)
- E = ค่า Young's Modulus ของวัสดุ (GN/m^2)
- I = Modulus of Inertia ของพื้นที่หน้าตัด (mm^4)
- C = ระยะจากแนวแกนสะเทินไปยังขอบบนหรือล่างสุดของหน้าตัด (mm)



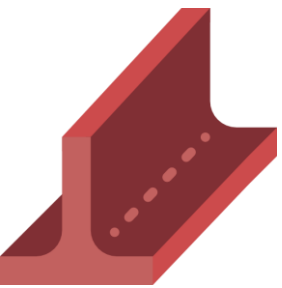


การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

1. หน้าตัดรูปสี่เหลี่ยม



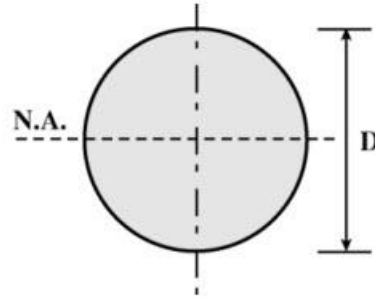
$$\begin{aligned} C &= \frac{h}{2} \\ A &= bh \\ I_{N.A.} &= \frac{1}{12} bh^3 \end{aligned}$$





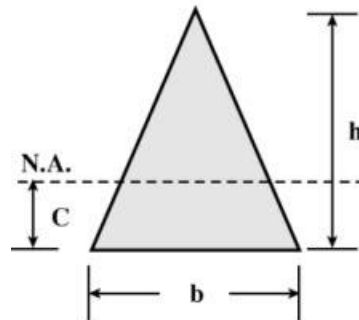
การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

2. หน้าตัดรูปวงกลม



$$\begin{aligned} C &= \frac{D}{2} \\ A &= \frac{\pi}{4} D^2 \\ I_{N.A.} &= \frac{\pi}{64} D^4 \end{aligned}$$

3. หน้าตัดรูปวงกลม



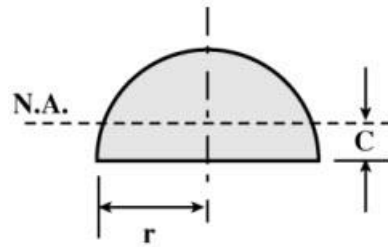
$$\begin{aligned} C &= \frac{h}{3} \\ A &= \frac{1}{2} bh \\ I_{N.A.} &= \frac{1}{36} bh^3 \end{aligned}$$





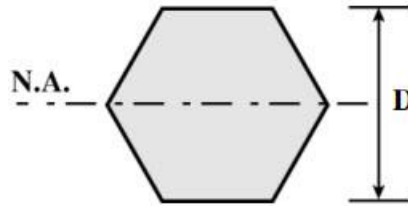
การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

4. หน้าตัดรูปวงกลม



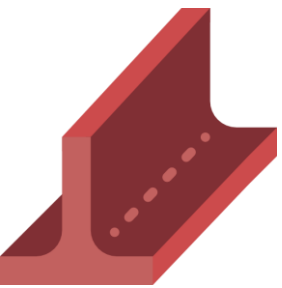
$$\begin{aligned}C &= \frac{4r}{3\pi} \\A &= \frac{\pi r^2}{2} \\I_{N.A.} &= 0.110r^4\end{aligned}$$

5. หน้าตัดรูปวงกลม



$$\begin{aligned}C &= \frac{D}{2} \\A &= 0.866D^2 \\I_{N.A.} &= 0.06D^4\end{aligned}$$

เมื่อ C = ระยะจากแนวแกนสะเทินไปยังขอบบนและล่างสุดของหน้าตัด (mm)
 A = พื้นที่หน้าตัดของคาน (mm²)
 $I_{N.A.}$ = โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ต้องการหา (mm⁴)

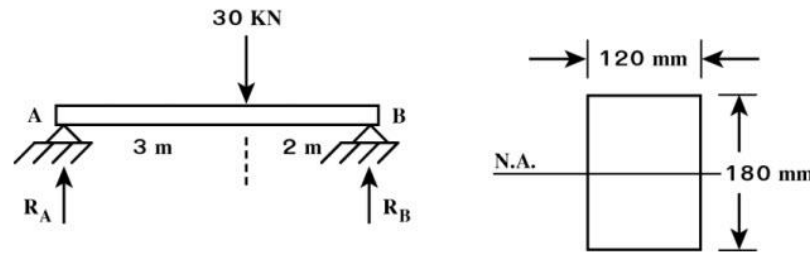




การหาโมเมนต์ของความเค้นรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

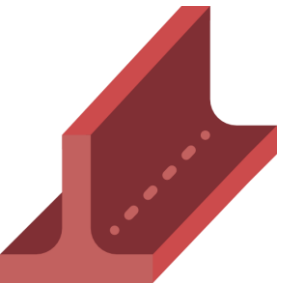
ตัวอย่างที่ 5.1 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดียวยาว 5 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 120 มิลลิเมตร สูง 180 มิลลิเมตรมีแรงมากระทำ (ดังรูป)

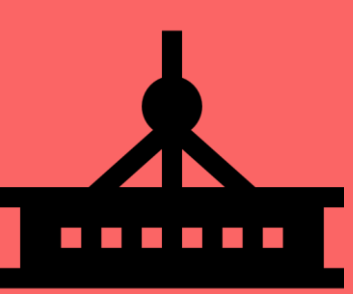
วิธีทำ



หาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B

$$\begin{aligned}\text{จาก } \sum M_A &= 0 \\ (30 \times 3) - 5R_B &= 0 \\ 90 \text{ KN-m} &= 5R_B \\ \frac{90}{5} &= R_B = 18 \text{ KN} \\ \text{จาก } R_{\text{รวม}} &= R_A + R_B \\ 30 &= R_A + 18 \\ 30 - 18 &= R_A = 12 \text{ KN}\end{aligned}$$





การหาโมเมนต์ของความเคี้ยวรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 5.1 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดียวยาว 5 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 120 มิลลิเมตร สูง 180 มิลลิเมตรมีแรงมากระทำ (ดังรูป)

ที่ระยะ $0 < x < 3$

$$V = 12 \text{ KN}$$

$$M = 12 (x) \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 0, \quad M = 12 (0) = 0 \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 3, \quad M = 12 (3) = 36 \text{ KN-m}$$

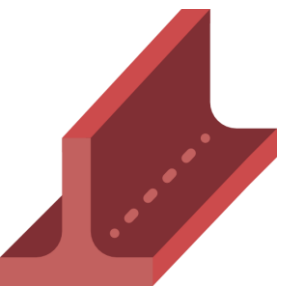
ที่ระยะ $3 < x < 5$

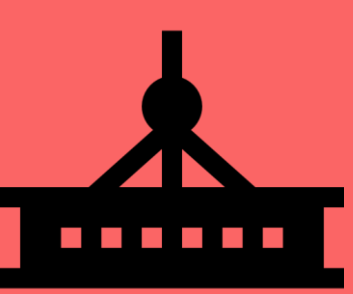
$$V = 12 - 30 = -18 \text{ KN}$$

$$M = 12 (x) - 30 (x - 3) \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 3, \quad M = 12 (3) - 30 (3 - 3) = 36 \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 5, \quad M = 12 (2) - 30 (5 - 3) = 0 \text{ KN-m}$$





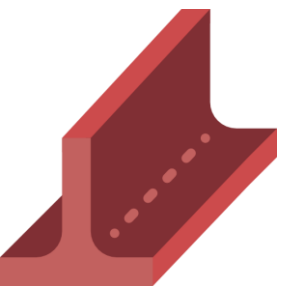
การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

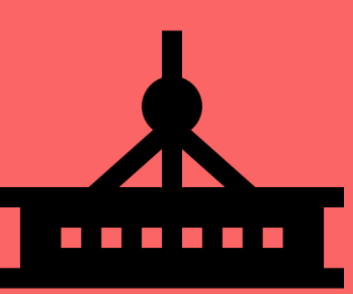
ตัวอย่างที่ 5.1 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดียวยาว 5 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 120 มิลลิเมตร สูง 180 มิลลิเมตรมีแรงมากระทำ (ดังรูป)

จากสูตร	σ	=	$\frac{MC}{I}$
เมื่อ	M	=	36,000,000 N-mm
	C	=	$\frac{h}{2} = \frac{180}{2} = 90 \text{ mm}$
	I	=	$\frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(120)(180^3) = 58,320,000 \text{ mm}^4$
แทนค่า	σ	=	$\frac{36,000,000 \times 90}{58,320,000}$
		=	55.56 N/mm ²

∴ ความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นเท่ากับ 55.56 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร

ตอบ

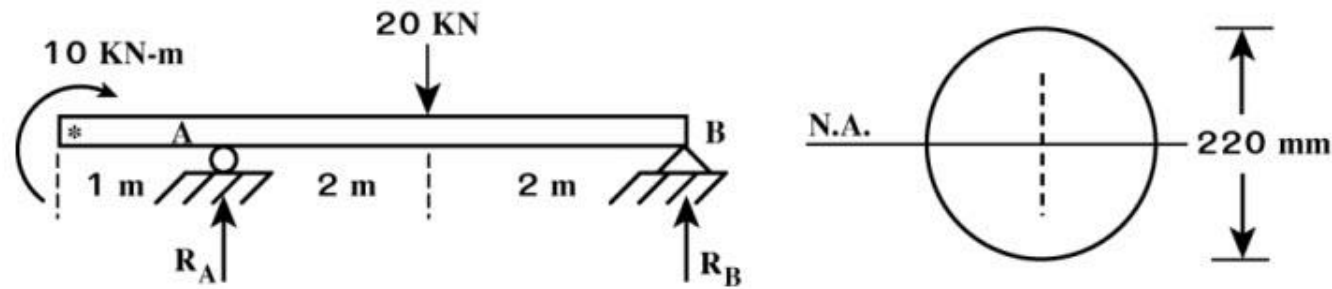




การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 5.2 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดียวยาว 5 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปวงกลมมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 220 มิลลิเมตร มีแรงมากระทำ (ดังรูป)

วิธีทำ

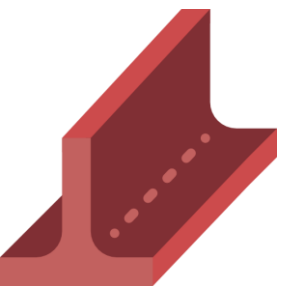


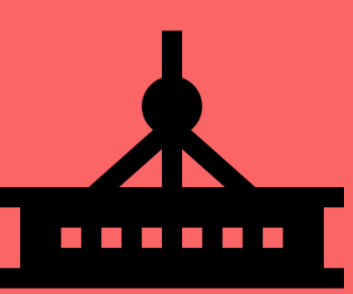
หาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B

$$\text{จาก } \sum M_A = 0$$

$$10 + (20 \times 2) - 4R_B = 0$$

$$50 \text{ kN-m} = 4R_B$$





การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 5.2 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดี่ยวยาว 5 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปวงกลมมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 220 มิลลิเมตร มีแรงมากระทำ (ดังรูป)

$$\frac{50}{4} = R_B = 12.5 \text{ KN}$$

จาก $R_{\text{รวม}} = R_A + R_B$

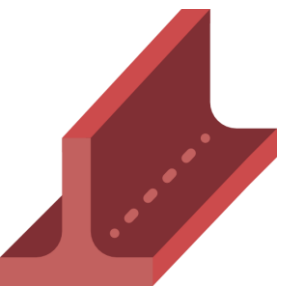
$$20 = R_A + 12.5$$

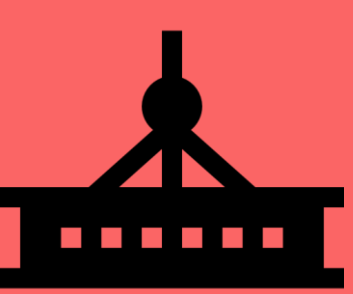
$$20 - 12.5 = R_A = 7.5 \text{ KN}$$

ที่ระยะ $0 < x < 1$

$$V = 0 \text{ KN}$$

$$M = 10 \text{ KN-m}$$





การหาโมเมนต์ของความเคี้ยวรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 5.2 จงคำนวณหาความเคี้ยวสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดียวยาว 5 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปวงกลมมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 220 มิลลิเมตร มีแรงมากระทำ (ดังรูป)

ที่ระยะ $1 < x < 3$

$$V = 7.5 \text{ KN}$$

$$M = 10 + 7.5(x - 1) \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 1, \quad M = 10 + 7.5(1 - 1) = 10 \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 3, \quad M = 10 + 7.5(3 - 1) = 25 \text{ KN-m}$$

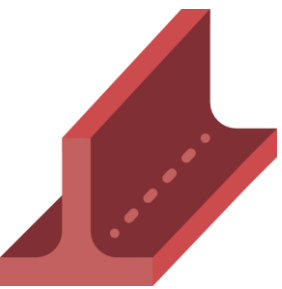
ที่ระยะ $3 < x < 5$

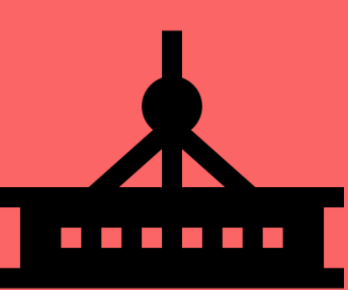
$$V = 7.5 - 20 = -12.5 \text{ KN}$$

$$M = 10 + 7.5(x - 1) - 20(x - 3) \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 3, \quad M = 10 + 7.5(3 - 1) - 20(3 - 3) = 25 \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 5, \quad M = 10 + 7.5(5 - 1) - 20(5 - 3) = 0 \text{ KN-m}$$





การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 5.2 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดียวยาว 5 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปวงกลมมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 220 มิลลิเมตร มีแรงมากระทำ (ดังรูป)

จากสูตร	σ	=	$\frac{MC}{I}$
เมื่อ	M	=	25,000,000 N-mm
	C	=	$\frac{D}{2} = \frac{220}{2} = 110 \text{ mm}$
	I	=	$\frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi (220)^4}{64} = 114,990,145.1 \text{ mm}^4$
แทนค่า	σ	=	$\frac{25,000,000 \times 110}{114,990,145.1}$
		=	23.92 N/mm ²

∴ ความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นเท่ากับ 23.92 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร

ตอบ

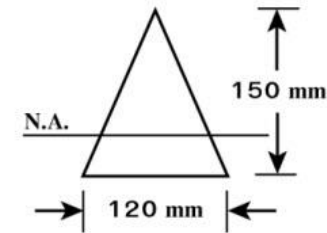
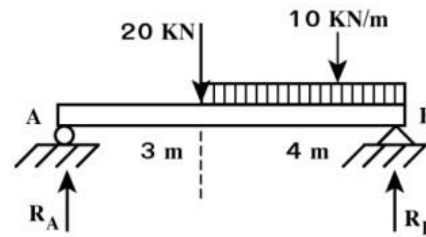




การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

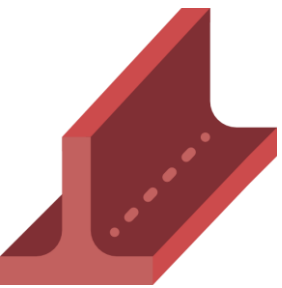
ตัวอย่างที่ 5.3 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดียวยาว 7 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปสามเหลี่ยม มีแรงมากระทำ (ดังรูป)

วิธีทำ



หาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B

$$\begin{aligned}\text{จาก } \sum M_A &= 0 \\ (30 \times 3) + (40 \times 5) - 7R_B &= 0 \\ 260 \text{ KN-m} &= 7R_B \\ \frac{260}{7} &= R_B = 37.14 \text{ KN} \\ \text{จาก } R_{\text{รวม}} &= R_A + R_B \\ 60 &= R_A + 37.14 \\ 60 - 37.14 &= R_A = 22.86 \text{ KN}\end{aligned}$$





การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 5.3 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดียวยาว 7 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปสามเหลี่ยม มีแรงแม่เหล็ก (ดังรูป)

ที่ระยะ $0 < x < 3$

$$V = 22.86 \text{ KN}$$

$$M = 22.86 (x) \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 0, \quad M = 22.86 (0) = 0 \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 3, \quad M = 22.86 (3) = 68.58 \text{ KN-m}$$

ที่ระยะ $3 < x < 7$

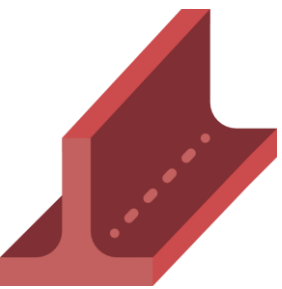
$$V = 22.86 - 20 - 10 (x - 3) \text{ KN}$$

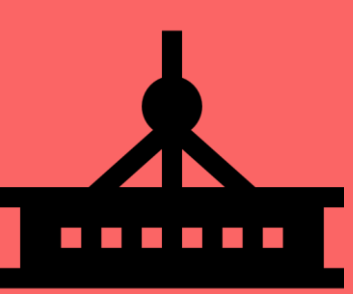
$$\text{ถ้า } x = 3, \quad V = 22.86 - 20 - 10 (3 - 3) = 2.86 \text{ KN}$$

$$\text{ถ้า } x = 7, \quad V = 22.86 - 20 - 10 (7 - 3) = -37.14 \text{ KN}$$

$$M = 22.86(x) - 20 (x - 3) - 10 (x - 3) \left(\frac{x - 3}{2} \right) \text{ KN-m}$$

$$= 22.86(x) - 20 (x - 3) - 5(x - 3)^2 \text{ KN-m}$$





การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 5.3 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดียวยาว 7 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปสามเหลี่ยม มีแรงแม่เหล็ก (ดังรูป)

$$\text{ถ้า } x = 3, \quad M = 22.86(3) - 20(3 - 3) - 5(3 - 3)^2 = 68.58 \text{ KN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 7, \quad M = 22.86(7) - 20(7 - 3) - 5(7 - 3)^2 = 0 \text{ KN-m}$$

∴ โมเมนต์ดัดสูงสุดจะเกิดขึ้นที่ $V = 0$

$$\text{จะได้} \quad 0 = 22.86 - 20 - 10(x - 3)$$

$$10(x - 3) = 22.86 - 20$$

$$10x - 30 = 2.86$$

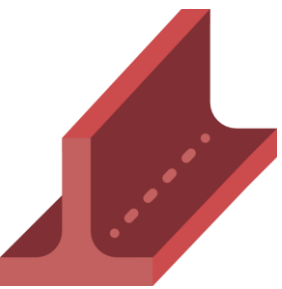
$$x = \frac{32.86}{10}$$

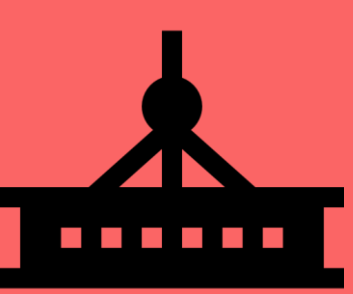
$$x = 3.29 \text{ m}$$

$$\text{จาก} \quad M = 22.86(x) - 20(x - 3) - 5(x - 3)^2 \text{ KN-m}$$

$$\text{แทนค่า } (x = 3.29) \quad M = 22.86(3.29) - 20(3.29 - 3) - 5(3.29 - 3)^2 \text{ KN-m}$$

$$M = 69.06 \text{ KN-m}$$





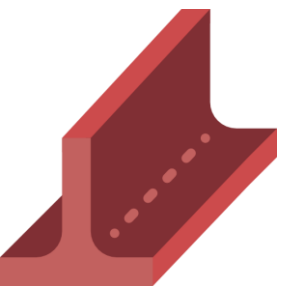
การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

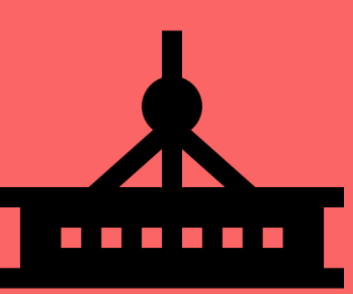
ตัวอย่างที่ 5.3 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานช่วงเดียวยาว 7 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปสามเหลี่ยม มีแรงแม่เหล็ก (ดังรูป)

จากสูตร	σ	=	$\frac{MC}{I}$
เมื่อ	M	=	69,000,000 N-mm
	C	=	$\frac{h}{3} = \frac{150}{3} = 50 \text{ mm}$
	I	=	$\frac{1}{36}bh^3 = \frac{1}{36}(120)(150^3) = 11,250,000 \text{ mm}^4$
แทนค่า	σ	=	$\frac{69,090,000 \times 50}{11,250,000}$
		=	307.07 N/mm ²

∴ ความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นเท่ากับ 307.07 นิวตันต่อตารางมิลลิเมตร

ตอบ

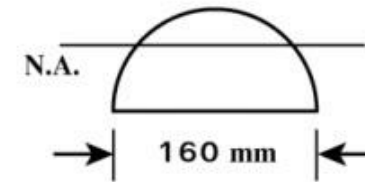
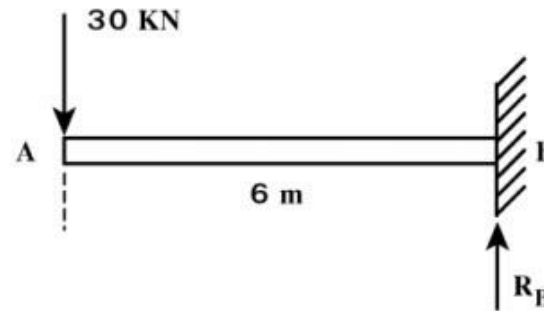




การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 5.4 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานยื่น ยาว 6 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปครึ่งวงกลม มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 160 มิลลิเมตร มีแรงมากระทำ (ดังรูป)

วิธีทำ



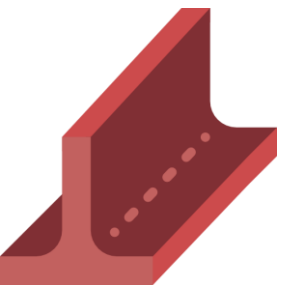
ที่ระยะ $0 < x < 6$

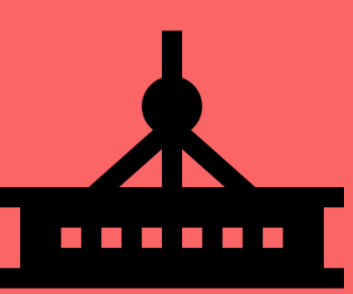
$$V = -30 \text{ kN}$$

$$M = -30(x) \text{ kN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 0, \quad M = -30(0) = 0 \text{ kN-m}$$

$$\text{ถ้า } x = 6, \quad M = -30(6) = -180 \text{ kN-m}$$





การหาโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของ หน้าตัดรูปต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 5.4 จงคำนวณหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานยื่น ยาว 6 เมตร มีพื้นที่หน้าตัดของคานเป็นรูปครึ่งวงกลม มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 160 มิลลิเมตร มีแรงมากระทำ (ดังรูป)

จากสูตร	σ	=	$\frac{MC}{I}$
เมื่อ	M	=	180,000,000 N - mm
	C	=	$\frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 80}{3\pi} = 33.95 \text{ mm}$
	I	=	$0.110r^4 = 0.11(80)^4 = 4,505,600 \text{ mm}^4$
แทนค่า	σ	=	$\frac{180,000,000 \times 33.95}{4,505,600}$
		=	$1,356.31 \text{ N/mm}^2$

∴ ความเค้นดัดสูงสุดเท่ากับ 1,356.31 กิโลนิวตันต่อตารางมิลลิเมตร

ตอบ

