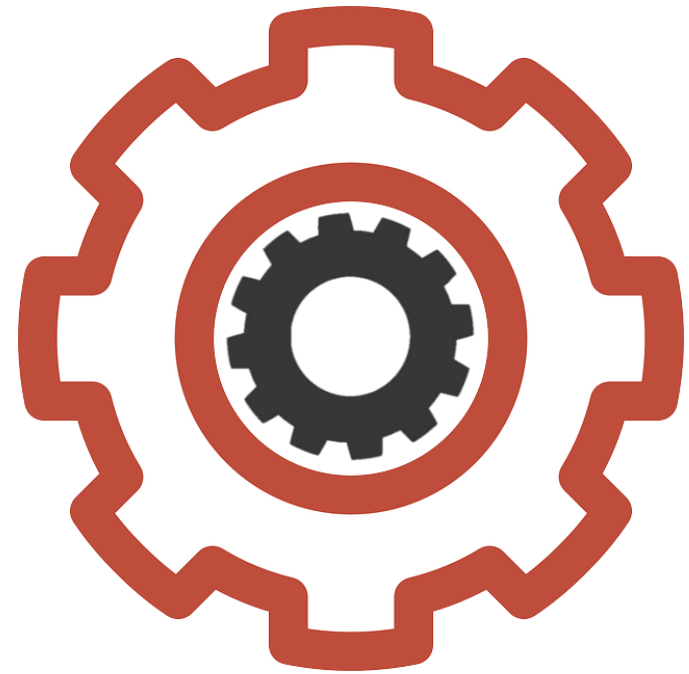




สมการโมเมนตัมและพลังงาน (Equation of Momentum and Energy)





กฎข้อที่สองของนิวตัน กล่าวว่า แรงที่กระทำกับวัตถุจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับมวลและเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร่ง โดยกฎดังกล่าวนำมาใช้วิเคราะห์หาโมเมนตัม-การดล ที่เกิดขึ้นในของไหลและใช้วิเคราะห์แรงของของไหลที่กระทำกับท่อ พลังงานที่เกิดขึ้นในของไหลเกิดขึ้นเนื่องจากของไหลมีการเคลื่อนที่โดยแรงที่กระทำกับของไหลนั้นในระยะเวลาที่กำหนดให้



1. กฎของพอยเซลเล
2. กฎของสโตกส์
3. การดลและโมเมนตัม
4. แรงบนท่อความดัน
5. พลังงาน



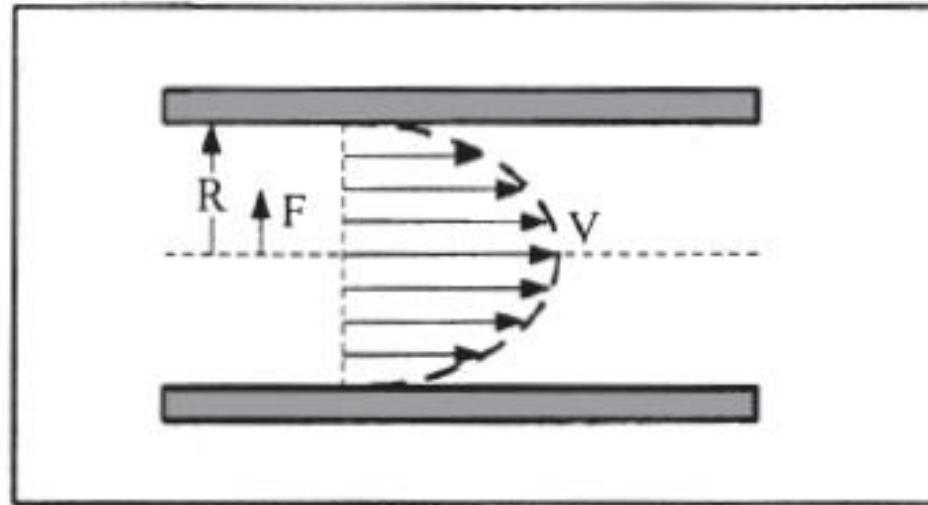
1. แสดงความรู้เกี่ยวกับสมการของการไหล
2. คำนวณพลังงานของของไหล



1. อธิบายกฎของพอยเซลเล่ได้ถูกต้อง
2. อธิบายกฎของสโตกส์ได้ถูกต้อง
3. อธิบายการดลได้ถูกต้อง
4. อธิบายโมเมนตัมได้ถูกต้อง
5. อธิบายพลังงานรูปต่างๆ ได้ถูกต้อง
6. คำนวณหาโมเมนตัม การดล และพลังงานรูปต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง

กฎของพอยเซลเล (Poiseuille's Law)

กฎของพอยเซลเล คือ ผลของความหนืดของของไหลที่ไหลผ่านท่อ โดยความเร็วของของไหลในท่อเดียวกันมีความเร็วไม่เท่ากัน ที่จุดศูนย์กลางของท่อมีความเร็วสูงสุดและมีค่าความเร็วเป็นศูนย์ที่บริเวณผนังท่อ



กฎของสโตกส์ (Stokes' Law)

กฎของสโตกส์ คือ แรงต้านทานเนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุทรงกลมในของไหล ขึ้นอยู่กับความหนืดสมบูรณ์ของของไหล รัศมีของวัตถุทรงกลม และความเร็วของวัตถุทรงกลมสัมพันธ์กับของไหล จะได้ว่า

$$F = 6\pi\mu rV$$

... 6.1

ถ้าวัตถุทรงกลมถูกปล่อยลงไปในของเหลวที่มีความหนืดและความหนาแน่น ρ' จนมีความเร็วสุดท้ายเป็น V จะได้ว่า น้ำหนักของวัตถุทรงกลม = แรงต้านจากความหนืด + สมดุลของแรงลอยตัว

โดย

$$\text{น้ำหนักของทรงกลม} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

$$\text{แรงต้านจากความหนืด} = 6\pi\mu rV$$

$$\text{สมดุลของแรงลอยตัว} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$$

กฎของสโตกส์ (Stokes' Law)

กฎของสโตกส์ คือ แรงต้านทานเนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุทรงกลมในของไหล ขึ้นอยู่กับความหนืดสมบูรณ์ของของไหล รัศมีของวัตถุทรงกลม และความเร็วของวัตถุทรงกลมสัมพันธ์กับของไหล จะได้ว่า

$$F = 6\pi\mu rV$$

... 6.1

ถ้าวัตถุทรงกลมถูกปล่อยลงไปในของเหลวที่มีความหนืดและความหนาแน่น ρ' จนมีความเร็วสุดท้ายเป็น V จะได้ว่า น้ำหนักของวัตถุทรงกลม = แรงต้านจากความหนืด + สมดุลของแรงลอยตัว

โดย

$$\text{น้ำหนักของทรงกลม} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

$$\text{แรงต้านจากความหนืด} = 6\pi\mu rV$$

$$\text{สมดุลของแรงลอยตัว} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$$

กฎของสโตกส์ (Stokes' Law)

ดังนั้น

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g = 6\pi\mu rV + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho' g$$

$$V = \frac{2}{9} \left(\frac{gr^2 (\rho - \rho')}{\mu} \right)$$

... 6.2

การดลและโมเมนตัม

(Impulse and Momentum)

การดล (Impulse) คือ ผลคูณของแรงดลกับช่วงเวลาสั้นๆ ที่แรงกระทำต่อวัตถุ

ดังนั้น

$$\text{การดล} = F \times t$$

... 6.3

โดย

I = การดล

F = แรงดลที่กระทำ (N)

t = เวลาที่แรงนั้นกระทำ (S)

หน่วยของการดล มีหน่วยเป็น (N.s)

การดลและโมเมนตัม

(Impulse and Momentum)

โมเมนตัม (Momentum) คือ มวลของวัตถุคูณกับความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่

ดังนั้น

$$\text{โมเมนตัม} = M \times V$$

... 6.4

โดย

M = มวลของวัตถุ (kg)

V = ความเร็วของวัตถุ ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)

การดลและโมเมนตัม

(Impulse and Momentum)

หน่วยของโมเมนตัม มีหน่วยเป็น (kg.m/s)

การดลและโมเมนตัม ใช้กฎของนิวตันที่กล่าวว่า อัตราเร่ง (a) ของอนุภาคใดๆ ที่เกิดขึ้นในทิศทางแรงลัพธ์ (F) จะเป็นปฏิภาคตรงกับแรงลัพธ์ แต่จะเป็นปฏิภาคผกผันกับมวล (m) ของอนุภาคนั้น กล่าวคือ

$$F = m \cdot a$$

... 6.5

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

... 6.6

โดย $a = \frac{dv}{dt}$

การดลและโมเมนตัม

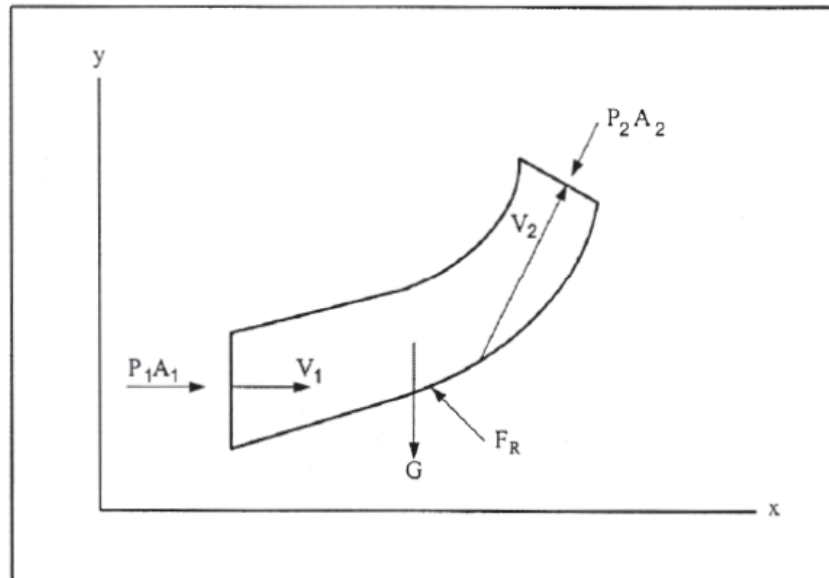
(Impulse and Momentum)

ดังนั้น

$$F dt = m dv$$

... 6.7

จากสมการที่ 6.7 สมการด้านซ้ายมือ คือ การดล และสมการด้านขวามือ คือ โมเมนตัม โดยการดลมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนโมเมนตัม วัตถุที่มีมวลอยู่ในการควบคุมปริมาตร โดยมีตำแหน่งคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่าง



การดลและโมเมนตัม

(Impulse and Momentum)

การวิเคราะห์ข้อมูลหาแรงที่เกิดขึ้นจากการไหลของของไหลในท่อโค้ง แรงที่กระทำต่อลำของของไหล คือ

- แรง F_1 เกิดจากความดัน $P_1 \times A_1$

$$\text{ดังนั้น } F_1 = P_1 A_1$$

- แรง F_2 เกิดจากความดัน $P_2 \times A_2$

$$\text{ดังนั้น } F_2 = P_2 A_2$$

- แรง G เป็นแรงที่เกิดจากน้ำหนักของของไหลในท่อ

- แรง F_R เป็นแรงปฏิกิริยาที่ผนังของท่อกระทำต่อของไหล โดยแรงที่เกิดจากการไหล

ของของไหลกระทำต่อผนังของท่อ จะมีปริมาณเท่ากับแรง F_R มีทิศทางตรงข้ามจะได้ผลรวมของแรงในแกน x และแกน y

ดังนี้

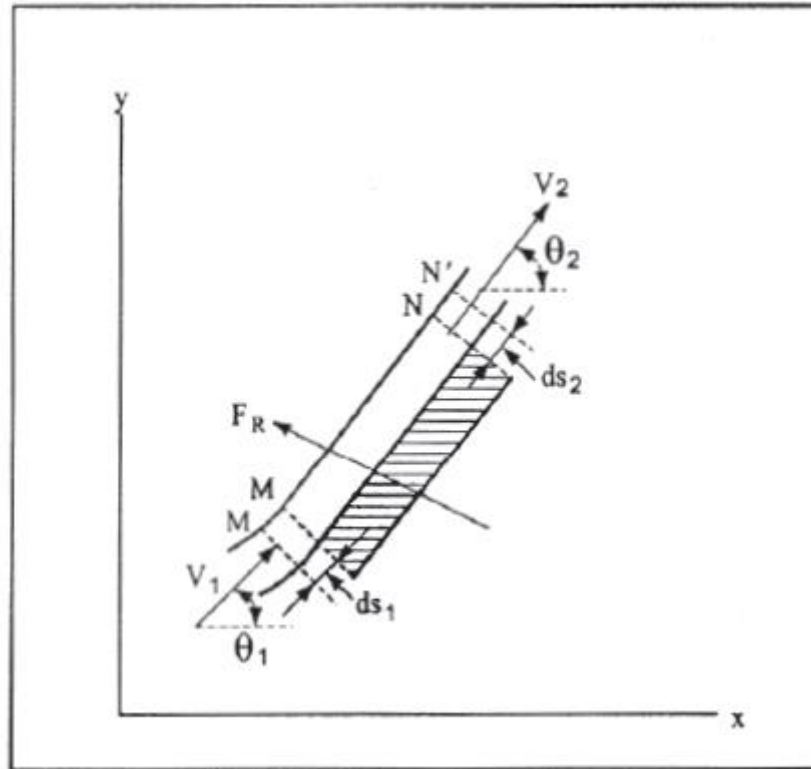
$$\sum f_x = F_{1x} - F_{2x} - F_{Rx} \quad \dots 6.8$$

$$\sum f_y = F_{1y} - F_{2y} + F_{Ry} - G \quad \dots 6.9$$

การดลและโมเมนตัม

(Impulse and Momentum)

ในการวิเคราะห์ข้อมูลหาผลรวมของแรงที่เกิดขึ้นจากการไหลของของไหล โดยอาศัยหลักการโมเมนตัม



การดลและโมเมนตัม

(Impulse and Momentum)

พิจารณาถึงลำของของไหล MN

โดย

V_1	คือ ความเร็วของของไหลที่จุด M
V_2	คือ ความเร็วของของไหลที่จุด N
θ_1	คือ มุมที่ความเร็ว V_1 กระทำในแนวราบ
θ_2	คือ มุมที่ความเร็ว V_2 กระทำในแนวราบ
F_R	คือ แรงปฏิกิริยาจากภายนอกที่กระทำต่อของไหล

การดลและโมเมนตัม

(Impulse and Momentum)

ในช่วงเวลา dt ของไหลเคลื่อนที่จาก M ไป M' และ N ไป N' ทำให้ปริมาตรของของไหล เปลี่ยนจาก Q_1 เป็น Q_2

โดย โมเมนตัม = มวลสาร x ความเร็ว

มวล = ความหนาแน่น x ปริมาตร

การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม = การเปลี่ยนแปลงของมวล x ความเร็ว

ดังนั้น $d(mv) = (\rho_2 Q_2 dt) V_2 - (\rho_1 Q_1 dt) V_1 \quad \dots 6.10$

โดย $d(mv)$ คือ การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมในช่วงเวลาหนึ่ง

Q คือ ปริมาตรของของไหล

ρ คือ ความหนาแน่นของของไหล

dt คือ ช่วงเวลาที่พิจารณา

V คือ ความเร็วในการไหลของของไหล

การดลและโมเมนตัม

(Impulse and Momentum)

จากสมการ 6.10 เขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{d(mv)}{dt} = (\rho_2 Q_2 V_2) - (\rho_1 Q_1 V_1) \quad \dots 6.11$$

การไหลของของไหลเป็นการไหลอย่างสม่ำเสมอ (Steady Flow) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{มวลของของไหลที่ } M &= \text{มวลของของไหลที่ } N \\ \rho_1 Q_1 &= \rho_2 Q_2 \end{aligned}$$

จากสมการ 6.11 เขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{d(mv)}{dt} = \rho Q (V_2 - V_1)$$

การดลและโมเมนตัม (Impulse and Momentum)

การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเป็นผลรวมทางเวกเตอร์โดย V_1 และ V_2 กระทำเป็นมุม θ_1 และ θ_2 กับแนวแกน x ตามลำดับ เมื่อคิดการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมในแนวแกน x และแนวแกน y จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} (mv)_x = \rho Q (V_2 \cos \theta_2 - V_1 \cos \theta_1) \quad \dots 6.12$$

$$\frac{d}{dt} (mv)_y = \rho Q (V_2 \sin \theta_2 - V_1 \sin \theta_1) \quad \dots 6.13$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน ผลรวมของแรงมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมในช่วงเวลาหนึ่ง

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

การดลและโมเมนตัม

(Impulse and Momentum)

โดยการประยุกต์กฎข้อที่สองของนิวตันเกี่ยวกับโมเมนตัมจะได้ว่า

$$\sum F = \frac{d(mv)}{dt}$$

ดังนั้น

$$\sum F_x = \frac{d(mv)_x}{dt}$$

$$\sum F_y = \frac{d(mv)_y}{dt}$$

การดลและโมเมนตัม (Impulse and Momentum)

ดังนั้น จึงสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างสมการ 6.8 กับสมการ 6.12 และสมการ 6.9 กับสมการ 6.13 จะได้ว่า

$$\sum F_x \rightarrow F_{1x} - F_{2x} - F_{Rx} = \rho Q (V_2 \cos \theta_2 - V_1 \cos \theta_1) \quad \dots 6.14$$

ดังนั้น

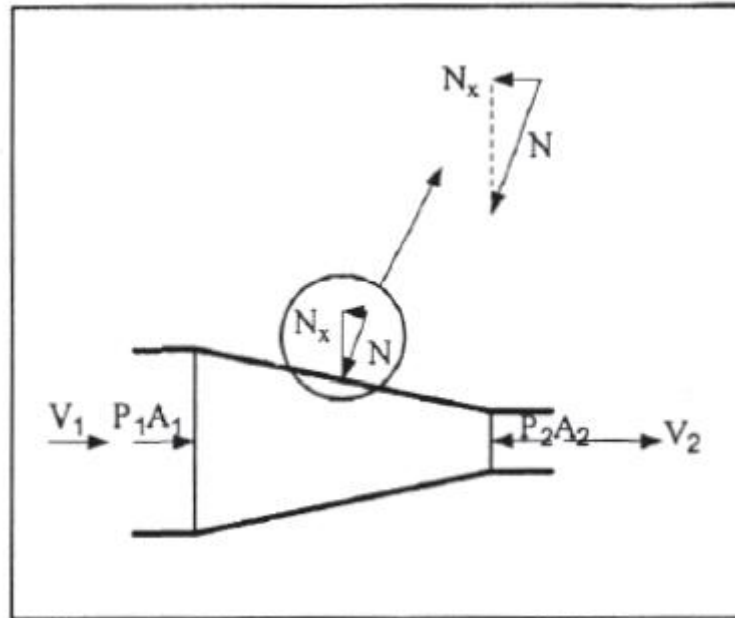
$$\sum F_y \rightarrow F_{1y} - F_{2y} - F_{Ry} - G = \rho Q (V_2 \sin \theta_2 - V_1 \sin \theta_1) \quad \dots 6.15$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad \dots 6.16$$

แรงบนท่อความดัน

(Force Exerted Upon Pipe)

เมื่อพิจารณาการไหลของของไหลผ่านท่อภายใต้ความดัน จะมีแรงมากระทำกับของไหลทำให้ของไหลเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่เปลี่ยนไป



แรงบนท่อความดัน (Force Exerted Upon Pipe)

แรงที่ทำให้ของไหลเคลื่อนที่ คือ $\sum F_x = \frac{W}{g} (V_2 - V_1)$ พื้นที่หน้าตัดลดลงจะทำให้ความดันเพิ่มขึ้น ถ้าไม่คำนึงถึงแรงโน้มถ่วง แรง N_x ที่กระทำกับผนังท่อ โดยหาได้จากสมการการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม คือ

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 - N_x = \frac{W}{g} (V_2 - V_1) \quad \dots 6.17$$

จากสมการที่ 6.17 หา N_x ได้ดังนี้

$$N_x = P_1 A_1 - P_2 A_2 - \frac{W}{g} (V_2 - V_1) \quad \dots 6.18$$

โดย N_x คือ แรงที่กระทำบนผนังท่อความดันของไหล

พลังงาน (Energy)

พลังงาน	คือ	ความสามารถที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความร้อน งาน และพลังงาน
กำลัง	คือ	งานหรือพลังงานต่อหน่วยเวลา
งาน	คือ	ผลของแรงคูณระยะทาง

พลังงานที่ใช้มีอยู่หลายรูปแบบ เช่น พลังงานศักย์ พลังงานจลน์ พลังงานภายใน พลังงานจากการไหลของของไหลซึ่งจะได้กล่าวรายละเอียดต่อไปนี้

1.พลังงานศักย์ (Potential Energy) คือ พลังงานที่แฝงอยู่ในมวลของสารนั้น และความแตกต่างของพลังงานขึ้นอยู่กับ มวลและระดับความสูงภายใต้แรงดึงดูดของโลก

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

... 6.19

พลังงาน (Energy)

$$E_P = m \cdot g \cdot h$$

... 6.19

โดย

E_P = พลังงานศักย์ (N.m หรือ J)

m = มวลของวัตถุ ในที่นี้คือมวลของของไหล (kg)

g = อัตราเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (m/s^2)

h = ความสูงวัดจากระดับอ้างอิงใด ๆ (m)

พลังงาน (Energy)

2. พลังงานจลน์ (Kinetic Energy) คือ ความสามารถที่ให่วัตถุนั้นทำงานได้เนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุ ปริมาณของพลังงานจลน์จะมากน้อยแต่ไหนขึ้นอยู่กับความเร็ว และขนาดของมวลวัตถุนั้น

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad \dots 6.20$$

โดย

E_k	=	พลังงานจลน์ (N.m หรือ J)
m	=	มวลของวัตถุ (kg)
v	=	ความเร็วของวัตถุ (m/s)

พลังงาน (Energy)

3. พลังงานภายใน (Internal Energy) คือ เป็นคุณสมบัติประจำตัวของสสาร ถ้าอุณหภูมิของสสารยังไม่ถึงศูนย์สัมบูรณ์ สสารนั้นจะมีพลังงานภายในอยู่ พลังงานภายในเกิดจากการเคลื่อนที่ของปรมาณู

$$U = mc_v (T) \quad \dots 6.21$$

โดย

U = พลังงานภายใน (KJ)

m = มวลของสาร (kg)

c_v = ความจุความร้อนจำเพาะ ณ ปริมาตรคงที่ (KJ/kg.K)

T = อุณหภูมิ (K)

พลังงาน (Energy)

4. พลังงานหรืองานที่เกิดจากของไหล (Pressure Energy) คือ งานที่กระทำต่อมวลของของไหล เมื่อของไหลถูกบังคับให้ไหลผ่านขอบเขต ซึ่งจะคำนวณได้จากผลคูณของความดันและปริมาตร

$$P.r.E = P.V \quad \dots 6.21$$

โดย

$P.r.E$	=	พลังงานหรืองานที่เกิดจากของไหล (N.m หรือ J)
P	=	ความดันของของไหล (N/m^2)
V	=	ปริมาตรของของไหล (m^3)

ตัวอย่าง

วิธีทำ

ของไหลในท่อมีมวล 50 kg เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 5 m/s จะมีโมเมนตัมเท่าไร

จากสูตร

โมเมนตัม

$$= M \cdot V$$

โดย

M

$$= \text{มวลของของไหล } 50 \text{ kg}$$

V

$$= \text{ความเร็วในการเคลื่อนที่ } 5 \text{ m/s}$$

ดังนั้น

โมเมนตัม

$$= 50 \text{ kg} \times 5 \text{ m/s}$$

$$= 250 \text{ kg.m/s}$$

ตอบ

