

ศูนย์ส่งเสริมอาชีพ

ศ ส อ

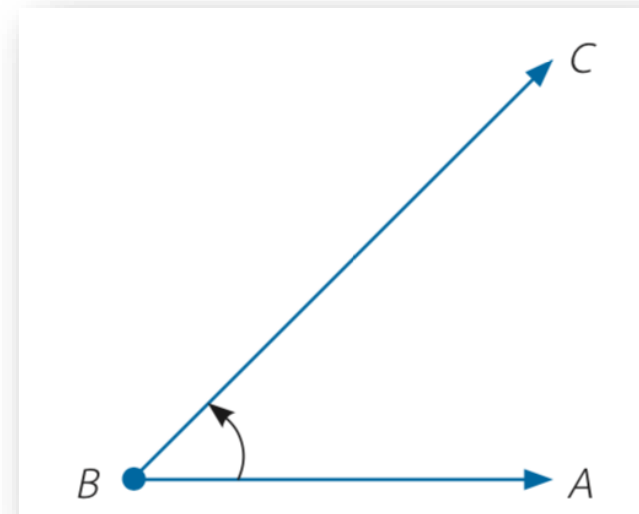
ทักษะสร้างอนาคต

คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

1

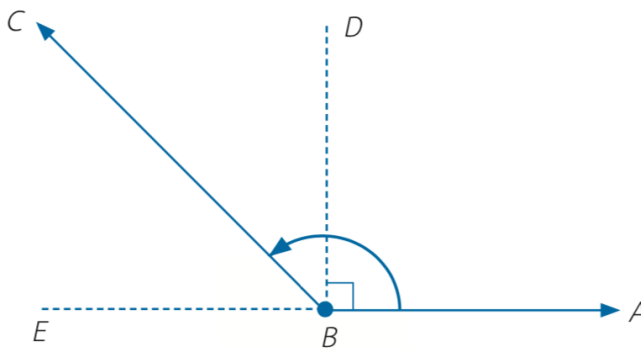
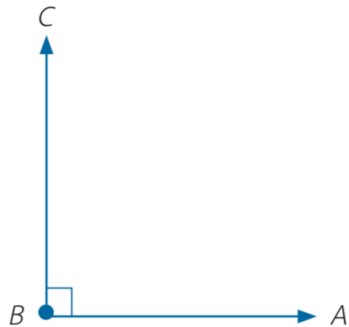


- (1) จุด B เรียกว่า จุดยอด (vertex)
- (2) ด้าน BA เรียกว่า ด้านเริ่มต้น (initial side) หรือแขนของมุม
- (3) ด้าน BC เรียกว่า ด้านสิ้นสุด (terminal side) หรือแขนของมุม

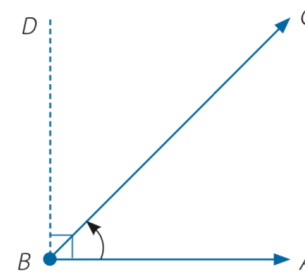


มุมและการวัดมุม

มุมฉาก ABC คือ มุมที่มีขนาดเท่ากับ 90 องศา



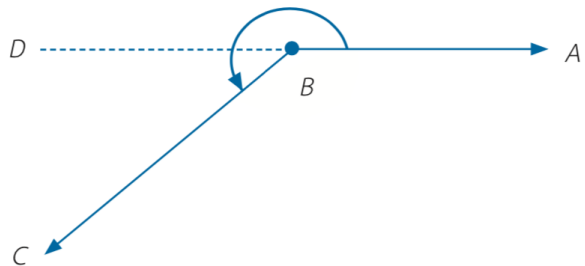
มุมแหลม ABC คือ มุมที่มีขนาดมากกว่า 0 องศา แต่ไม่ถึง 90 องศา



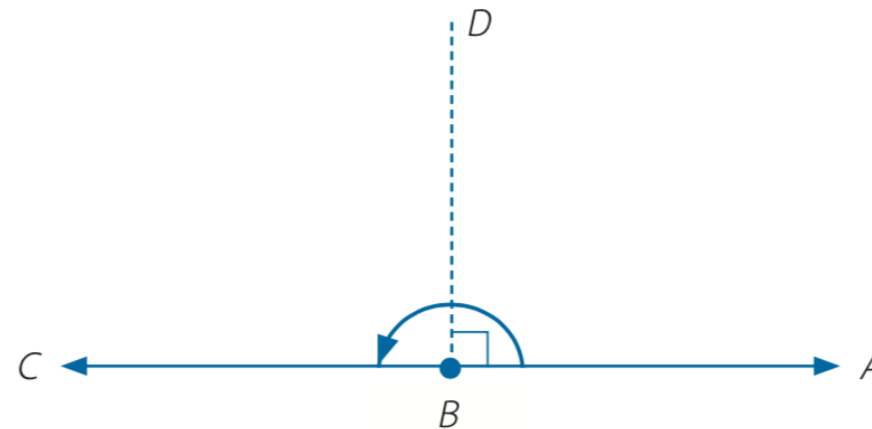
ชนิดของมุม

- มุมแหลม
- มุมฉาก
- มุมป้าน

มุมกลับ ABC คือ มุมที่มีขนาดใหญ่มากกว่า 2 มุมฉาก แต่ไม่ถึง 4 มุมฉาก เป็นมุมที่มีขนาดมากกว่า 180 องศา แต่ไม่ถึง 360 องศา



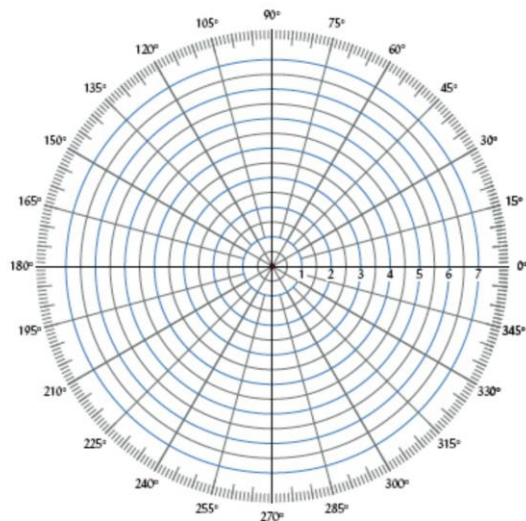
มุมตรง ABC คือ มุมที่มีขนาดเท่ากับ 180 องศา หรือ 2 มุมฉาก



ชนิดของมุม

■ มุมตรง

■ มุมกลับ



ตัวอย่างที่ 1.1 จงเปลี่ยนค่าของมุม 15.6784° ให้เป็นหน่วยของ องศา ลิปดา ฟลิปดา

วิธีทำ ให้นักเรียนพิจารณา ดังต่อไปนี้

1. จาก 15.6784° จะพบว่า มีหน่วยที่เป็นองศาเท่ากับ 15°
 2. ต่อไปเปลี่ยน 0.6784° ให้เป็นหน่วยลิปดา
จะได้ว่า $0.6784^\circ = (0.6784 \times 60)' = 40.704' (1^\circ = 60')$
 3. ต่อไปเปลี่ยน $0.704'$ ให้เป็นหน่วยฟลิปดา
จะได้ว่า $0.704' = (0.704 \times 60)'' = 42.24 (1' = 60'')$
- ดังนั้น $15.6784^\circ = 15^\circ 40' 42.24''$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.2 จงเปลี่ยนค่าของมุม 30.308° ให้เป็นหน่วยของ องศา ลิปดา ฟลิปดา

วิธีทำ จาก 30.308° จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 30.308^\circ &= 30^\circ + (0.308 \times 60)' \\ &= 30^\circ + 18.48' \\ &= 30^\circ + 18' + (0.48 \times 60)'' \\ &= 30^\circ + 18' + 28.8'' \end{aligned}$$

ดังนั้น $30.308^\circ = 30^\circ 18' 28.8''$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.3 จงเปลี่ยนค่าของมุม 73.1234° ให้เป็นหน่วยของ องศา ลิปดา ฟลิปดา

วิธีทำ จาก 73.1234° จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 73.1234^\circ &= 73^\circ + (0.1234 \times 60)' \\ &= 73^\circ + 7.404' \\ &= 73^\circ + 7' + (0.404 \times 60)'' \\ &= 73^\circ + 7' + 24.24'' \end{aligned}$$

ดังนั้น $73.1234^\circ = 73^\circ 7' 24.24''$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.4 จงเปลี่ยนค่าของมุม $73^\circ 7' 24.24''$ ให้เป็นหน่วยขององศา

วิธีทำ จาก $73^\circ 7' 24.24''$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 73^\circ 7' 24.24'' &= 73^\circ + \left(\frac{7}{60}\right)^\circ + \left(\frac{24.24}{3600}\right)^\circ \\ &= 73^\circ + (0.1167)^\circ + (0.0067)^\circ \\ &= 73.1234^\circ \end{aligned}$$

ดังนั้น $73^\circ 7' 24.24'' = 73.1234^\circ$

ตอบ

การวัดมุม

■ ระบบองศา

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ $45^{\circ}x'42'' = 45.5117^{\circ}$ จงหาค่าของ x

วิธีทำ วิธีที่ 1 จาก $45^{\circ}x'42'' = 45.5117^{\circ}$ จะได้ว่า

$$45^{\circ} + \left(\frac{x}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{42}{3600}\right)^{\circ} = 45.5117^{\circ}$$

$$45^{\circ} + \left(\frac{x}{60}\right)^{\circ} + (0.0117)^{\circ} = 45^{\circ} + 0.5^{\circ} + 0.0117^{\circ}$$

$$\frac{x}{60} = 0.5$$

$$\text{ดังนั้น } x = 30$$

ตอบ

วิธีที่ 2 จาก $45^{\circ}x'42'' = 45.5117^{\circ}$ จะได้ว่า

$$45.5117^{\circ} = 45^{\circ} + (0.5117 \times 60)'$$

$$= 45^{\circ} + (30.702)'$$

$$= 45^{\circ} + 30' + (0.702 \times 60)''$$

$$= 45^{\circ} + 30' + 42''$$

$$\text{ดังนั้น } 45^{\circ}x'42'' = 45^{\circ}30'42''$$

$$x = 30'$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.5 จงเปลี่ยนค่าของมุม $35^{\circ}12'22''$ ให้เป็นหน่วยขององศา

วิธีทำ จาก $35^{\circ}12'22''$ จะได้ว่า

$$35^{\circ}12'22'' = 35^{\circ} + \left(\frac{12}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{22}{3600}\right)^{\circ}$$

$$= 35^{\circ} + 0.2^{\circ} + 0.0061^{\circ}$$

$$= 35.2061^{\circ}$$

$$\text{ดังนั้น } 35^{\circ}12'22'' = 35.2061^{\circ}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.6 จงเปลี่ยนค่าของมุม $45^{\circ}30'34.23''$ ให้เป็นหน่วยขององศา

วิธีทำ จาก $45^{\circ}30'34.23''$ จะได้ว่า

$$45^{\circ}30'34.23'' = 45^{\circ} + \left(\frac{30}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{34.23}{3600}\right)^{\circ}$$

$$= 45^{\circ} + 0.5^{\circ} + 0.0095^{\circ}$$

$$= 45.5095^{\circ}$$

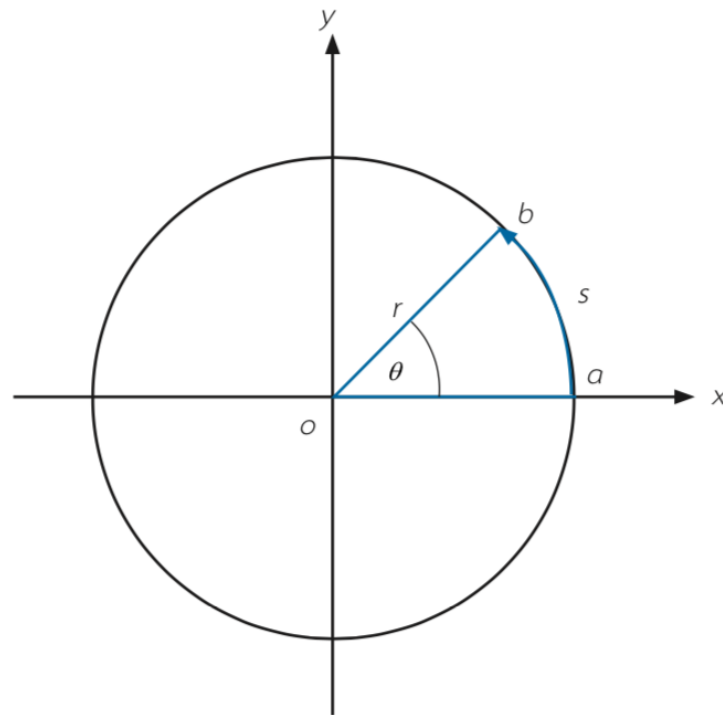
$$\text{ดังนั้น } 45^{\circ}30'34.23'' = 45.5095^{\circ}$$

ตอบ

การวัดมุม

ระบบเรเดียน

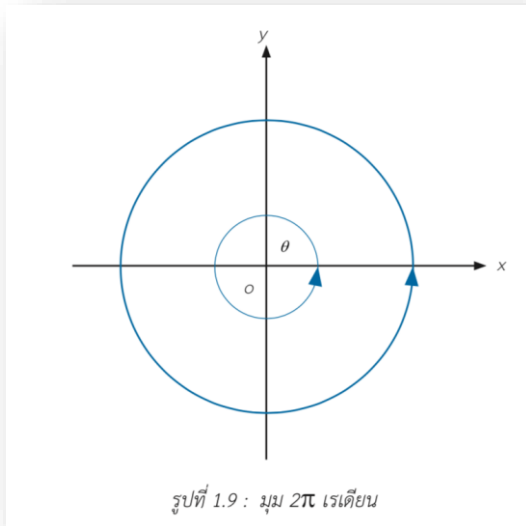
- เรเดียน คือ หน่วยวัดมุมชนิดหนึ่งบนระนาบสองมิติ โดยมุมหนึ่งเรเดียน คือ ขนาดของมุมที่วัดจากจุดศูนย์กลางของวงกลม



รูปที่ 1.8 : มุมในระบบเรเดียน

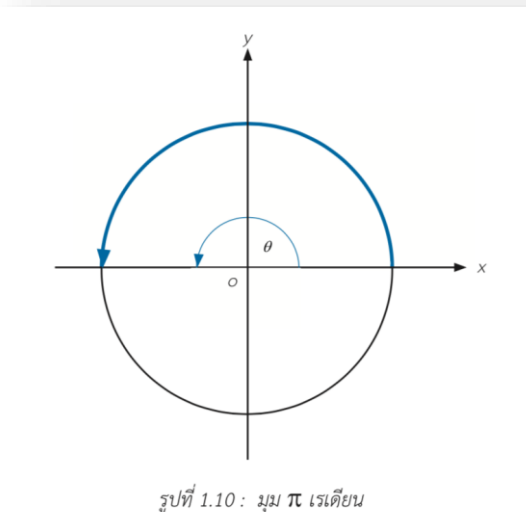
จากรูปที่ 1.8 จะพบว่า oa และ ob คือ รัศมีของวงกลมมีความยาวเท่ากับ r หน่วย และความยาวของส่วนโค้ง ab เท่ากับ s และถ้า $r = s$ แล้วมุม θ มีขนาด 1 เรเดียน

ระบบเรเดียน



บทนิยาม 1.2 เรเดียน คือ การวัดมุมที่จุดศูนย์กลาง ที่รองรับด้วยส่วนโค้ง s ที่ยาวเท่ากับรัศมี r

ข้อสังเกต 1.1 เนื่องจากความยาวของเส้นรอบวงกลมเท่ากับ $2\pi r$ หน่วย ดังนั้น มุมที่จุดศูนย์กลาง หนึ่งรอบจะรองรับด้วยความยาวของส่วนโค้ง $s = 2\pi r$ ถ้าต้องการหามุมที่จุดศูนย์กลาง θ เรเดียน เราจะได้จาก $\theta = \frac{s}{r}$ เมื่อ s คือ ความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม θ และ r คือ รัศมีของวงกลม

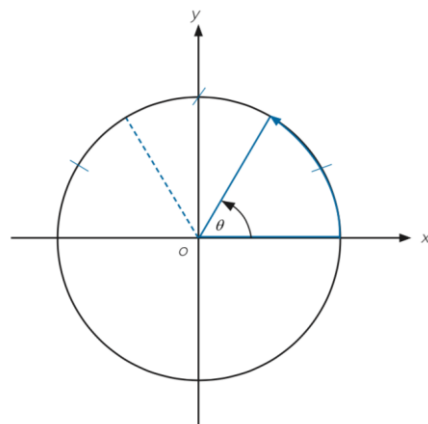


จากบทนิยามที่ 1.2 และข้อสังเกตที่ 1.1 ถ้า θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง 1 รอบ จะได้ว่า $\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ เรเดียน ดังนั้น

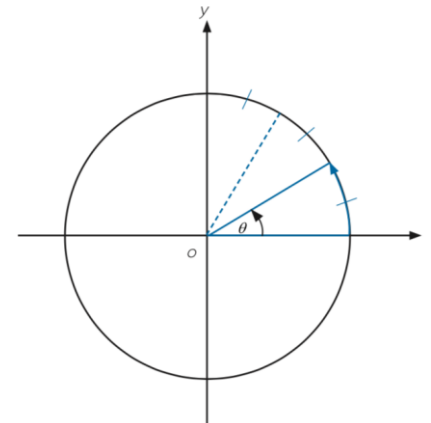
$\frac{1}{2}$ รอบ	$= \frac{2\pi}{2}$	$= \pi$	เรเดียน
$\frac{1}{4}$ รอบ	$= \frac{2\pi}{4}$	$= \frac{\pi}{2}$	เรเดียน
$\frac{1}{6}$ รอบ	$= \frac{2\pi}{6}$	$= \frac{\pi}{3}$	เรเดียน
$\frac{1}{8}$ รอบ	$= \frac{2\pi}{8}$	$= \frac{\pi}{4}$	เรเดียน
$\frac{1}{12}$ รอบ	$= \frac{2\pi}{12}$	$= \frac{\pi}{6}$	เรเดียน

จะได้รูปภาพดังต่อไปนี้

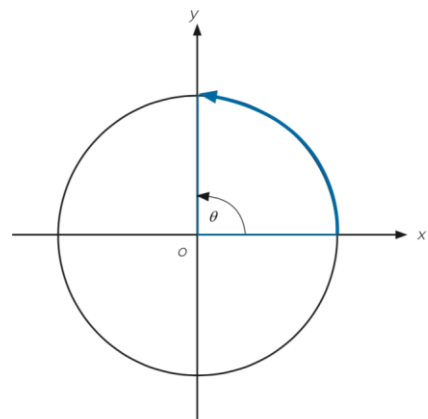
ระบบเรเดียน



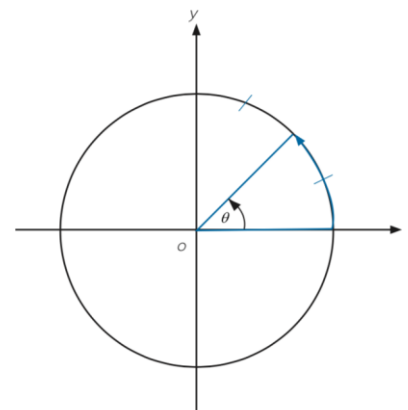
รูปที่ 1.12: มุม $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน



รูปที่ 1.14: มุม $\frac{\pi}{6}$ เรเดียน



รูปที่ 1.11: มุม $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน



รูปที่ 1.13: มุม $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน

การเปลี่ยนหน่วย ระหว่างองศา กับเรเดียน

ตัวอย่างที่ 1.10 จงเปลี่ยนค่าของมุม 120° ให้เป็นเรเดียน

วิธีทำ จาก $180^\circ = \pi$ เรเดียน จะได้ว่า

$$180^\circ = \pi \quad \text{เรเดียน}$$

$$120^\circ = \frac{\pi \times 120}{180} \quad \text{เรเดียน}$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{ดังนั้น } 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.11 จงเปลี่ยนค่าของมุม 15° ให้เป็นเรเดียน

วิธีทำ จาก $180^\circ = \pi$ เรเดียน จะได้ว่า

$$180^\circ = \pi \quad \text{เรเดียน}$$

$$15^\circ = \frac{\pi \times 15}{180} \quad \text{เรเดียน}$$

$$= \frac{\pi}{12} \quad \text{เรเดียน}$$

$$\text{ดังนั้น } 15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ เรเดียน}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.13 จงเปลี่ยนค่าของมุม $\frac{\pi}{7}$ เรเดียน ให้เป็นองศา

วิธีทำ จาก π เรเดียน $= 180^\circ$ จะได้ว่า

$$\pi \text{ เรเดียน} = 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{7} \text{ เรเดียน} = \left(\frac{180 \times \frac{\pi}{7}}{\pi} \right)^\circ = \left(180 \times \frac{\pi}{7} \times \frac{1}{\pi} \right)^\circ$$

$$= \left(\frac{180}{7} \right)^\circ$$

$$= 25.71^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\pi}{7} \text{ เรเดียน} = 25.71^\circ$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.12 จงเปลี่ยนค่าของมุม $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน ให้เป็นองศา

วิธีทำ จาก π เรเดียน $= 180^\circ$ จะได้ว่า

$$\pi \text{ เรเดียน} = 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน} = \left(\frac{180 \times \frac{\pi}{3}}{\pi} \right)^\circ = \left(180 \times \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{\pi} \right)^\circ$$

$$= \left(\frac{60 \times \pi}{\pi} \right)^\circ$$

$$= 60^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน} = 60^\circ$$

ตอบ

การเปลี่ยนหน่วย ระหว่างองศา กับเรเดียน

ตัวอย่างที่ 1.14 ในวงกลมวงหนึ่งมีมุมแหลมเท่ากับ 45° ถ้ารัศมีของวงกลมนี้มีค่าเท่ากับ r หน่วย แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมแหลม 45° จะเป็นเท่าไร

วิธีทำ จาก π เรเดียน $= 180^\circ$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \pi \text{ เรเดียน} \\ 45^\circ &= \frac{45 \times \pi}{180} \text{ เรเดียน} \\ &= \frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\theta = \frac{s}{r}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} s &= \theta \times r \\ &= \frac{\pi}{4} \times r \end{aligned}$$

ดังนั้น ส่วนโค้งที่รองรับมุมแหลม 45° จะมีค่าเป็น $\frac{\pi r}{4}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.16 กำหนดให้อัตราเร็วเชิงมุม $= \frac{\text{มุมที่จุดศูนย์กลางใน 1 ชั่วโมง}}{\text{เวลา}}$ วงล้อรถจักรยาน

หมุน 1.5 รอบต่อวินาที อัตราเร็วเชิงมุมของล้อรถจักรยานเป็นเท่าไร ($\pi = 3.14$)

วิธีทำ จากโจทย์วงล้อรถจักรยานหมุน 1.5 รอบ ใช้เวลา 1 วินาที

แต่เนื่องจากวงล้อรถจักรยานหมุน 1 รอบ มีค่าของมุมที่จุดศูนย์กลาง 2π เรเดียน
ดังนั้น วงล้อรถจักรยานหมุน 1.5 รอบ มีค่าของมุมที่จุดศูนย์กลาง $2\pi \times 1.5$ เรเดียน
 $= 2 \times 3.14 \times 1.5 = 9.42$ เรเดียน

โจทย์กำหนด อัตราเร็วเชิงมุม $= \frac{\text{มุมที่จุดศูนย์กลางใน 1 ชั่วโมง}}{\text{เวลา}}$

$$\text{จะได้ อัตราเร็วเชิงมุม} = \frac{9.42}{1} = 9.42 \text{ เรเดียน/วินาที}$$

ดังนั้น อัตราเร็วเชิงมุมคือ 9.42 เรเดียน/วินาที **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.15 วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่เป็นรูปวงกลมรัศมี 10 เซนติเมตร จำนวนหนึ่งรอบใช้เวลา 20 วินาที จงหาอัตราเร็วของวัตถุชิ้นนี้เป็นเท่าไร

วิธีทำ เนื่องจาก $\theta = \frac{s}{r}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} s &= \theta r \\ &= 2\pi \times 10 \\ &= 20\pi = 20 \times 3.14 ; \pi \approx 3.14 \\ \text{ดังนั้น ความยาวเส้นรอบวง} &= 62.8 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

เมื่อได้ความยาวของเส้นรอบวง (s) แล้ว หาอัตราเร็ว

$$\begin{aligned} \text{จาก อัตราเร็ว} &= \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}} \\ &= \frac{62.8}{20} \\ &= 3.14 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราเร็วของวัตถุคือ 3.14 เซนติเมตรต่อวินาที

ตอบ