

ศูนย์ส่งเสริมอาชีพ

ศ ส อ

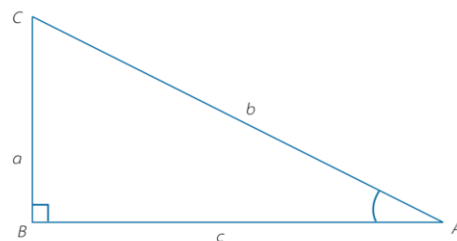
ทักษะสร้างอนาคต

คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

2



อัตราส่วนตรีโกณมิติ



รูปที่ 2.1 : สามเหลี่ยม ABC

จากรูปที่ 2.1 สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้าพิจารณาที่มุม A จะได้

1. ด้าน AB เป็น ด้านประชิดมุม A มีความยาวเท่ากับ c หน่วย
2. ด้าน BC เป็น ด้านตรงข้ามมุม A มีความยาวเท่ากับ a หน่วย
3. ด้าน AC เป็น ด้านตรงข้ามมุมฉาก มีความยาวเท่ากับ b หน่วย

- อัตราส่วนตรีโกณมิติเป็นส่วนหนึ่งของตรีโกณมิติซึ่งเป็นแขนงหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งว่าด้วยการวัดรูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ โดยหาความสัมพันธ์ระหว่างด้าน มุม และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

สรุป

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\ \cos A &= \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\ \tan A &= \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A} \\ \csc A &= \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A} \\ \sec A &= \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A} \\ \cot A &= \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}\end{aligned}$$

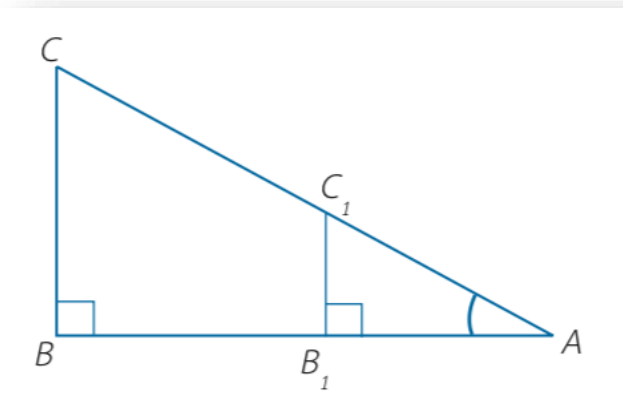
ข้อสังเกต 2.1 จากความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติจะพบว่า

$$\begin{aligned}1. \sin A &= \frac{1}{\csc A} \quad \text{หรือ} \quad \csc A = \frac{1}{\sin A} \quad \text{หรือ} \quad \sin A \cdot \csc A = 1 \\ 2. \cos A &= \frac{1}{\sec A} \quad \text{หรือ} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} \quad \text{หรือ} \quad \cos A \cdot \sec A = 1 \\ 3. \tan A &= \frac{1}{\cot A} \quad \text{หรือ} \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} \quad \text{หรือ} \quad \tan A \cdot \cot A = 1\end{aligned}$$

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

- ถ้าพิจารณาจากความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างด้าน 2 ด้าน ทั้งหมด 6 กรณีดังต่อไปนี้

1. $\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$ เรียกว่า sine ของมุม A เขียนแทนด้วย $\sin A$
2. $\frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$ เรียกว่า cosine ของมุม A เขียนแทนด้วย $\cos A$
3. $\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}$ เรียกว่า tangent ของมุม A เขียนแทนด้วย $\tan A$
4. $\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}$ เรียกว่า cosecant ของมุม A เขียนแทนด้วย $\csc A$
5. $\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}$ เรียกว่า secant ของมุม A เขียนแทนด้วย $\sec A$
6. $\frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}$ เรียกว่า cotangent ของมุม A เขียนแทนด้วย $\cot A$



ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม R คือ

$$\sin R = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } R}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos R = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } R}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan R = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } R}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } R} = \frac{4}{3}$$

$$\csc R = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } R} = \frac{5}{4}$$

$$\sec R = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } R} = \frac{5}{3}$$

$$\cot R = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } R}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } R} = \frac{3}{4}$$

วิธีทำ ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม P คือ

$$\sin P = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } P}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos P = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } P}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{4}{5}$$

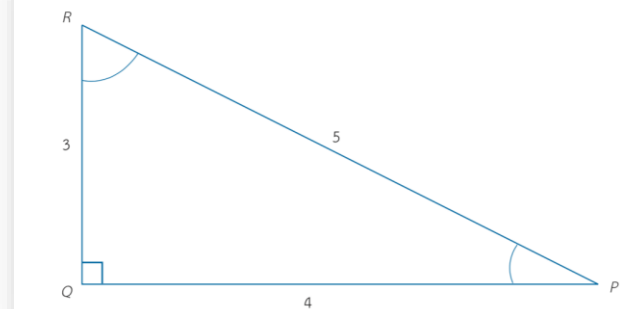
$$\tan P = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } P}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } P} = \frac{3}{4}$$

$$\csc P = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } P} = \frac{5}{3}$$

$$\sec P = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } P} = \frac{5}{4}$$

$$\cot P = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } P}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } P} = \frac{4}{3}$$

ตัวอย่างที่ 2.1 จากรูปที่ 2.2 จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม P และมุม R



อัตราส่วนตรีโกณมิติ

วิธีทำ การหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม X นั้น นักเรียนควรทราบค่าความยาวของด้านทั้งสามด้านก่อน เนื่องจากสามเหลี่ยม XYZ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$(xz)^2 = (xy)^2 + (yz)^2$$

$$2^2 = z^2 + 1^2$$

$$4 = z^2 + 1$$

$$z^2 = 3$$

$$z = \sqrt{3}$$

ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม X คือ

$$\sin X = \frac{1}{2}$$

$$\csc X = 2$$

$$\cos X = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

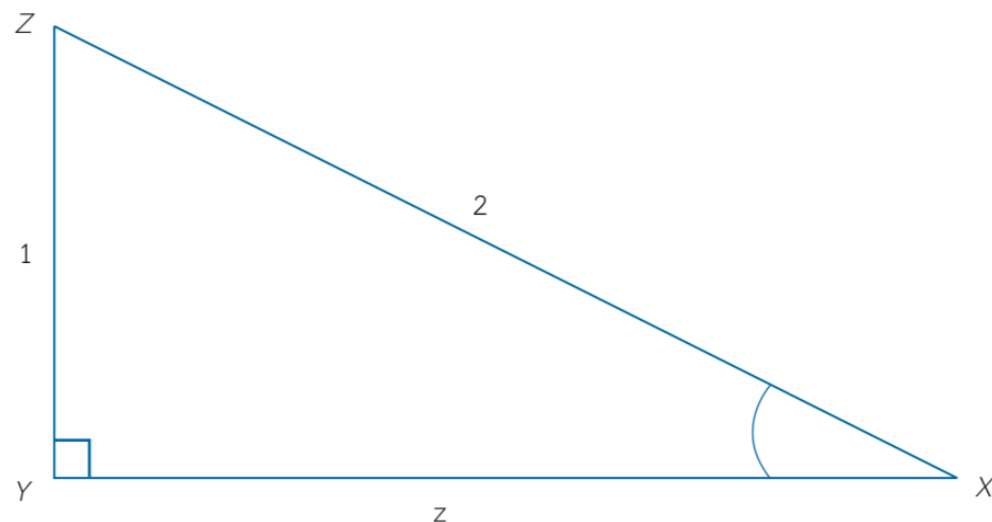
$$\sec X = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan X = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot X = \sqrt{3}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.2 จากรูปที่ 2.3 จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม X



อัตราส่วนตรีโกณมิติ

	sin	cos	tan	cot	sec	csc	
73°	0.9563	0.2924	3.2709	0.306	3.420	1.046	17°
74°	0.9613	0.2756	3.4875	0.287	3.628	1.040	16°
75°	0.9659	0.2588	3.7321	0.268	3.864	1.035	15°
76°	0.9703	0.2419	4.0110	0.249	4.134	1.031	14°
77°	0.9744	0.2250	4.3315	0.231	4.446	1.026	13°
78°	0.9782	0.2079	4.7045	0.213	4.810	1.022	12°
79°	0.9816	0.1908	5.1446	0.194	5.241	1.019	11°
80°	0.9848	0.1737	5.6713	0.176	5.759	1.016	10°
81°	0.9877	0.1564	6.3139	0.158	6.393	1.012	9°
82°	0.9903	0.1392	7.1150	0.141	7.185	1.010	8°
83°	0.9926	0.1219	8.1443	0.123	8.205	1.008	7°
84°	0.9945	0.1045	9.5151	0.105	9.568	1.006	6°
85°	0.9962	0.0872	11.4294	0.087	11.473	1.004	5°
86°	0.9976	0.0698	14.3000	0.070	14.334	1.003	4°
87°	0.9986	0.0523	19.0797	0.052	19.106	1.001	3°
88°	0.9994	0.0349	28.6359	0.035	28.653	1.001	2°
89°	0.9999	0.0175	57.2652	0.017	57.272	1.000	1°
90°	1.0000	0.0000	∞	0.000	∞	1.000	0°
	cos	sin	cot	tan	csc	sec	

	sin	cos	tan	cot	sec	csc	
33°	0.5447	0.8387	0.6494	1.540	1.192	1.836	57°
34°	0.5592	0.8290	0.6745	1.483	1.206	1.788	56°
35°	0.5736	0.8192	0.7002	1.428	1.221	1.744	55°
36°	0.5878	0.8090	0.7265	1.376	1.236	1.701	54°
37°	0.6018	0.7987	0.7536	1.327	1.252	1.662	53°
38°	0.6157	0.7880	0.7813	1.280	1.269	1.624	52°
39°	0.6293	0.7772	0.8098	1.235	1.287	1.589	51°
40°	0.6428	0.7660	0.8391	1.192	1.305	1.556	50°
41°	0.6561	0.7547	0.8693	1.150	1.325	1.524	49°
42°	0.6691	0.7431	0.9004	1.111	1.346	1.494	48°
43°	0.6820	0.7314	0.9325	1.072	1.367	1.466	47°
44°	0.6947	0.7194	0.9657	1.036	1.390	1.440	46°
45°	0.7071	0.7071	1.0000	1.000	1.414	1.414	45°
46°	0.7194	0.6947	1.0355	0.966	1.440	1.390	44°
47°	0.7314	0.6820	1.0724	0.933	1.466	1.367	43°
48°	0.7431	0.6691	1.1106	0.900	1.494	1.346	42°
49°	0.7547	0.6561	1.1503	0.869	1.524	1.325	41°
50°	0.7660	0.6428	1.1917	0.839	1.556	1.305	40°
51°	0.7772	0.6293	1.2349	0.810	1.589	1.287	39°
52°	0.7880	0.6157	1.2799	0.781	1.624	1.269	38°
53°	0.7987	0.6018	1.3271	0.754	1.662	1.252	37°
54°	0.8090	0.5878	1.3764	0.727	1.701	1.236	36°
55°	0.8192	0.5736	1.4281	0.700	1.744	1.221	35°
56°	0.8290	0.5592	1.4826	0.675	1.788	1.206	34°
57°	0.8387	0.5447	1.5398	0.649	1.836	1.192	33°
58°	0.8481	0.5299	1.6003	0.625	1.887	1.179	32°
59°	0.8572	0.5151	1.6642	0.601	1.942	1.167	31°
60°	0.8660	0.5000	1.7321	0.577	2.000	1.155	30°
61°	0.8746	0.4848	1.8040	0.554	2.063	1.143	29°
62°	0.8830	0.4695	1.8807	0.532	2.130	1.133	28°
63°	0.8910	0.4540	1.9626	0.510	2.203	1.122	27°
64°	0.8988	0.4384	2.0503	0.488	2.281	1.113	26°
65°	0.9063	0.4226	2.1445	0.466	2.366	1.103	25°
66°	0.9135	0.4067	2.2460	0.445	2.459	1.095	24°
67°	0.9205	0.3907	2.3559	0.424	2.559	1.086	23°
68°	0.9272	0.3746	2.4751	0.404	2.670	1.079	22°
69°	0.9336	0.3584	2.6051	0.384	2.791	1.071	21°
70°	0.9397	0.3420	2.7474	0.364	2.924	1.064	20°
71°	0.9455	0.3256	2.9041	0.344	3.071	1.058	19°
72°	0.9511	0.3090	3.0777	0.325	3.236	1.052	18°
	cos	sin	cot	tan	csc	sec	...

	sin	cos	tan	cot	sec	csc	
0°	0.0000	1.0000	0.0000	∞	1.000	∞	90°
1°	0.0175	0.9999	0.0175	57.265	1.000	57.272	89°
2°	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	1.001	28.653	88°
3°	0.0523	0.9986	0.0524	19.080	1.001	19.106	87°
4°	0.0698	0.9976	0.0699	14.300	1.003	14.334	86°
5°	0.0872	0.9962	0.0875	11.429	1.004	11.473	85°
6°	0.1045	0.9945	0.1051	9.515	1.006	9.568	84°
7°	0.1219	0.9926	0.1228	8.144	1.008	8.205	83°
8°	0.1392	0.9903	0.1406	7.115	1.010	7.185	82°
9°	0.1564	0.9877	0.1584	6.314	1.012	6.393	81°
10°	0.1737	0.9848	0.1763	5.671	1.016	5.759	80°
11°	0.1908	0.9816	0.1944	5.145	1.019	5.241	79°
12°	0.2079	0.9782	0.2126	4.704	1.022	4.810	78°
13°	0.2250	0.9744	0.2309	4.332	1.026	4.446	77°
14°	0.2419	0.9703	0.2493	4.011	1.031	4.134	76°
15°	0.2588	0.9659	0.2680	3.732	1.035	3.864	75°
16°	0.2756	0.9613	0.2867	3.488	1.040	3.628	74°
17°	0.2924	0.9563	0.3057	3.271	1.046	3.420	73°
18°	0.3090	0.9511	0.3249	3.078	1.052	3.236	72°
19°	0.3256	0.9455	0.3443	2.904	1.058	3.071	71°
20°	0.3420	0.9397	0.3640	2.747	1.064	2.924	70°
21°	0.3584	0.9336	0.3839	2.605	1.071	2.791	69°
22°	0.3746	0.9272	0.4040	2.475	1.079	2.670	68°
23°	0.3907	0.9205	0.4245	2.356	1.086	2.559	67°
24°	0.4067	0.9135	0.4452	2.246	1.095	2.459	66°
25°	0.4226	0.9063	0.4663	2.145	1.103	2.366	65°
26°	0.4384	0.8988	0.4877	2.050	1.113	2.281	64°
27°	0.4540	0.8910	0.5095	1.963	1.122	2.203	63°
28°	0.4695	0.8830	0.5317	1.881	1.133	2.130	62°
29°	0.4848	0.8746	0.5543	1.804	1.143	2.063	61°
30°	0.5000	0.8660	0.5774	1.732	1.155	2.000	60°
31°	0.5151	0.8572	0.6009	1.664	1.167	1.942	59°
32°	0.5299	0.8481	0.6249	1.600	1.179	1.887	58°
	cos	sin	cot	tan	csc	sec	...

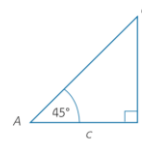
การใช้ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ข้อสังเกต 2.2 การอ่านตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติมี 2 กรณี

- 1) ถ้าพิจารณาค่ามุมทางด้านซ้ายของตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะพิจารณาจากอัตราส่วนตรีโกณมิติในแถวบนของตาราง
- 2) ถ้าพิจารณาค่ามุมทางด้านขวาของตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะพิจารณาจากอัตราส่วนตรีโกณมิติในแถวล่างของตาราง

การใช้ตารางค่า อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหาค่าของ c โดยใช้ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ



วิธีทำ จากรูปจะพบว่า c คือความยาวของด้านตรงข้ามมุม 30° และความยาวด้านตรงข้ามมุม 45° เท่ากับ 5 หน่วย

$$\text{จากสูตร } \tan A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}$$

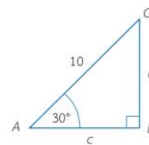
$$\text{จะได้ว่า } \tan 45^\circ = \frac{5}{c}$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{5}{\tan 45^\circ} \\ &= \frac{5}{1} \quad (\text{จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ } \tan 45^\circ = 1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น c มีความยาวเท่ากับ 5 หน่วย

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.5 จงหาค่าของ a โดยใช้ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ



วิธีทำ จากรูปจะพบว่า a คือความยาวของด้านตรงข้ามมุม 30° และความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับ 10 หน่วย

$$\text{จากสูตร } \sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\text{จะได้ว่า } \sin 30^\circ = \frac{a}{10}$$

$$\begin{aligned} a &= 10 \sin 30^\circ \\ &= 10 \times 0.5 \quad (\text{จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ } \sin 30^\circ = 0.5) \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น a มีความยาวเท่ากับ 5 หน่วย

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.3 จงใช้ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 15°

วิธีทำ จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$\sin 15^\circ = 0.2588$$

$$\cos 15^\circ = 0.9659$$

$$\tan 15^\circ = 0.2680$$

$$\cot 15^\circ = 3.732$$

$$\sec 15^\circ = 1.035$$

$$\csc 15^\circ = 3.864$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.4 จงใช้ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 73°

วิธีทำ จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$\sin 73^\circ = 0.9563$$

$$\cos 73^\circ = 0.2924$$

$$\tan 73^\circ = 3.2709$$

$$\cot 73^\circ = 0.306$$

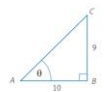
$$\sec 73^\circ = 3.420$$

$$\csc 73^\circ = 1.046$$

ตอบ

การใช้ตารางค่า อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 2.8 จงหาค่าของ θ โดยใช้ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ



วิธีทำ จากรูป ด้านตรงข้ามมุม θ คือ BC ยาว 9 หน่วย และด้านประชิดมุม θ คือ AB ยาว 10 หน่วย

$$\text{จากสูตร } \tan \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}$$

$$\text{จะได้ว่า } \tan \theta = \frac{9}{10} \\ = 0.9$$

เมื่อพิจารณาจากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติพบว่า $\tan \theta = 0.9$ มีค่าอยู่ระหว่าง $\tan 41^\circ = 0.8693$ และ $\tan 42^\circ = 0.9004$ จากตารางแสดงค่าของมุมค่ากับ $42^\circ - 41^\circ = 1^\circ$ ทำให้ค่า tangent ของมุมค่ากับ $0.9004 - 0.8693 = 0.0311$ ดังนั้น หา θ จากค่า tangent ของมุมค่ากับ $0.9 - 0.8693 = 0.0307$ แล้วหาของมุมค่ากับเท่าไร โดยใช้การหารแบบปัดเศษได้ขนาด ดังนี้

$$\text{ค่า tangent ของมุมค่ากับ } 0.0311 \text{ ค่าของมุมค่ากับ } = 1^\circ$$

$$\text{ค่า tangent ของมุมค่ากับ } 0.0307 \text{ ค่าของมุมค่ากับ } = \frac{1 \times 0.0307}{0.0311} = 0.9871 \approx 0.99^\circ$$

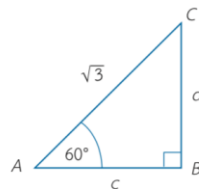
$$\text{ดังนั้น ค่า tangent ของมุมค่ากับ } 0.8693 + 0.0307 \text{ ค่าของมุมค่ากับมุม } 41^\circ + 0.99^\circ \\ \text{หรือ ค่า tangent ของมุมค่ากับ } 0.9 \text{ ค่าของมุมค่ากับ } 41.99^\circ$$

$$\text{และถ้า } \tan \theta = 0.9 = \tan 41.99^\circ$$

$$\theta = 41.99^\circ$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.7 จงหาค่าของ a และ c โดยใช้ตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ



วิธีทำ หาความยาวของด้าน a ซึ่งเป็นด้านตรงข้ามมุม 60°

$$\text{จากสูตร } \sin A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\text{จะได้ว่า } \sin 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$a = \sin 60^\circ \times \sqrt{3}$$

$$= 0.8660 \times 1.7321 \text{ (จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ)}$$

$$\sin 60^\circ = 0.8660 \text{ และ}$$

$$\sqrt{3} \text{ มีค่าประมาณ } 1.7321$$

$$= 1.5$$

หาความยาวของด้าน c ซึ่งเป็นด้านประชิดมุม 60° ซึ่งจะหาจากค่า $\cos 60^\circ$ หรือ $\tan 60^\circ$ ก็ได้

$$\text{จากสูตร } \cos A = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}$$

$$\text{จะได้ว่า } \cos 60^\circ = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$c = \sqrt{3} \cos 60^\circ$$

$$= \sqrt{3} \cdot 0.5$$

$$= 1.7321 \times 0.5$$

$$= 0.86605$$

$$\approx 0.9$$

$$\text{หรือ จากสูตร } \tan A = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}$$

$$\text{จะได้ว่า } \tan 60^\circ = \frac{1.5}{c}$$

$$c = \frac{1.5}{\tan 60^\circ}$$

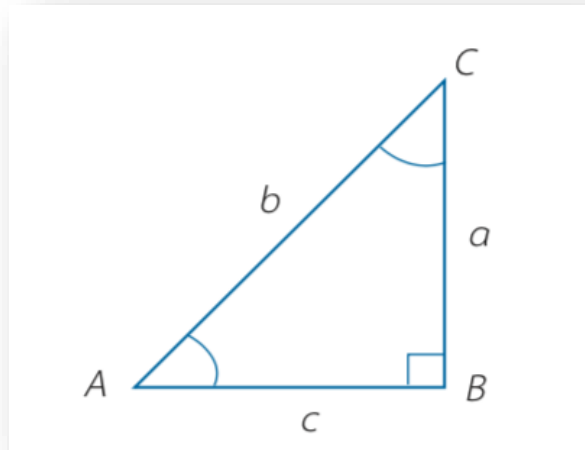
$$= \frac{1.5}{1.7321}$$

$$= 0.86605 \approx 0.9$$

ดังนั้น a และ c มีความยาวเท่ากับ 1.5 และ 0.9 หน่วย ตามลำดับ **ตอบ**

ความสัมพันธ์ของ ด้านและมุม

ความสัมพันธ์ของมุมในด้าน
สามเหลี่ยมมุมฉาก



สรุปความสัมพันธ์อัตราส่วนตรีโกณมิติจากความสัมพันธ์ของมุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{a}{c} = \cos C \\ \cos A &= \frac{b}{c} = \sin C \\ \tan A &= \frac{a}{b} = \cot C \\ \csc A &= \frac{c}{a} = \sec C \\ \sec A &= \frac{c}{b} = \sec C \\ \cot A &= \frac{b}{a} = \tan C\end{aligned}$$

กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุม B เป็นมุมฉาก จากอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A และมุม C จะพบว่า

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{a}{c} \\ &= \cos C \\ \cos A &= \frac{b}{c} \\ &= \sin C \\ \tan A &= \frac{a}{b} \\ &= \cot C \\ \csc A &= \frac{c}{a} \\ &= \sec C \\ \sec A &= \frac{c}{b} \\ &= \csc C \\ \cot A &= \frac{b}{a} \\ &= \tan C\end{aligned}$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \quad \text{เรียกมุม A และมุม C เป็นมุมประกอบ} \\ \text{หนึ่งมุมฉากซึ่งกันและกัน}$$

$$\text{และ} \quad \hat{A} = 90^\circ - \hat{C} \quad \text{หรือ}$$

$$\text{หรือ} \quad \hat{C} = 90^\circ - \hat{A}$$

จากหัวข้อที่ 1 จะได้ว่า

$$\sin A = \cos C \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin A = \cos(90^\circ - A)$$

$$\cos A = \sin C \quad \text{ดังนั้น} \quad \cos A = \sin(90^\circ - A)$$

$$\tan A = \cot C \quad \text{ดังนั้น} \quad \tan A = \cot(90^\circ - A)$$

$$\csc A = \sec C \quad \text{ดังนั้น} \quad \csc A = \sec(90^\circ - A)$$

$$\sec A = \csc C \quad \text{ดังนั้น} \quad \sec A = \csc(90^\circ - A)$$

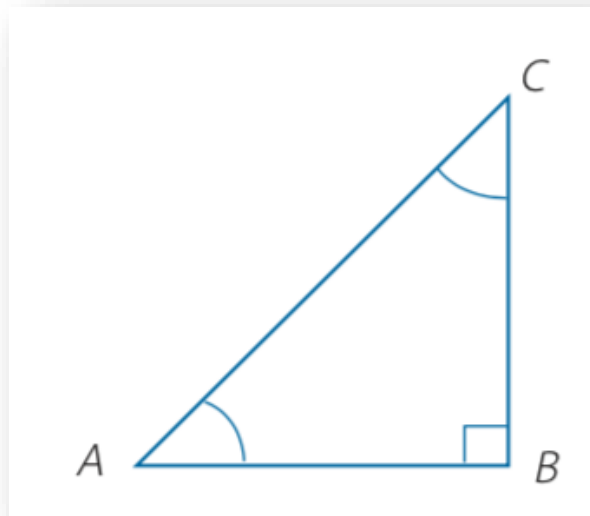
$$\cot A = \tan C \quad \text{ดังนั้น} \quad \cot A = \tan(90^\circ - A)$$

ตัวอย่าง เช่น

$$\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \cot(90^\circ - 60^\circ) = \cot 30^\circ$$



ความสัมพันธ์ของ ด้านและมุม

ความสัมพันธ์ของมุมประกอบ
หนึ่งมุมฉาก

สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก เนื่องจากผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีค่าเท่ากับ 180° และ $\hat{B} = 90^\circ$

$$\text{ดังนั้น} \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{A} + 90^\circ + \hat{C} = 180^\circ$$

ความสัมพันธ์ของด้าน และมุม

$$\text{จะได้ } \sin A = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\cos A = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\tan A = \frac{3}{5}$$

$$\csc A = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

$$\sec A = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\cot A = \frac{5}{3}$$

จากความสัมพันธ์ของมุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า

$$\sin C = \cos A = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\cos C = \sin A = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

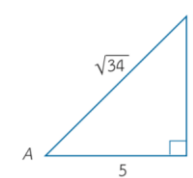
$$\tan C = \cot A = \frac{5}{3}$$

$$\csc C = \sec A = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

$$\sec C = \csc A = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

$$\cot C = \tan A = \frac{3}{5}$$

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A และ C



วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก หาคความยาวด้าน AC จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= 5^2 + 3^2 \\ &= 25 + 9 = 34 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } AC = \sqrt{34}$$

ความสัมพันธ์ของด้าน และมุม

ตัวอย่างที่ 2.10 กำหนดให้ $\sin 53^\circ = 0.7987$ และ $\cos 53^\circ = 0.6018$ จงหาค่าของ $\sin 37^\circ$ และ $\cos 37^\circ$

วิธีทำ

จากสูตร $\sin A = \cos (90^\circ - A)$

จะได้ $\sin 37^\circ = \cos (90^\circ - 37^\circ)$

$$= \cos 53^\circ$$

$$= 0.6018$$

ตอบ

และ $\cos A = \sin (90^\circ - A)$

$$\cos 37^\circ = \sin (90^\circ - 37^\circ)$$

$$= \sin 53^\circ$$

$$= 0.7987$$

ตอบ