

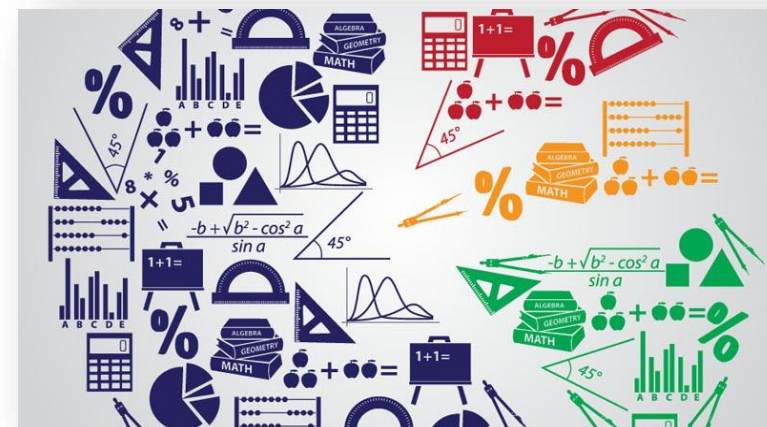
ศูนย์ส่งเสริมอาชีพ

ศ ส อ

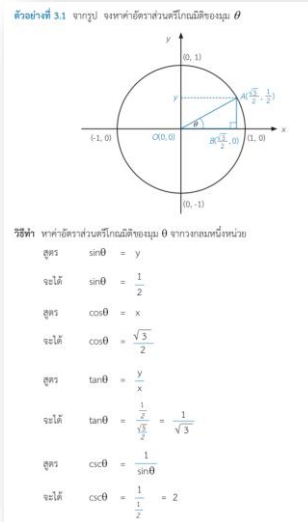
ทักษะสร้างอนาคต

คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

3



วงกลมหนึ่งหน่วย



สูตร $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

จะได้ $\sec \theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

สูตร $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

จะได้ $\cot \theta = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

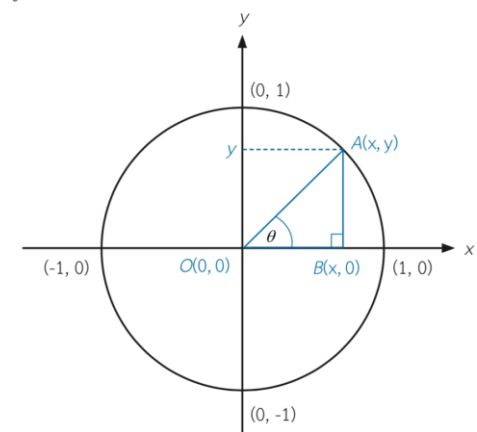
จากรูป 3.1 จุด $A(x, y)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $O(0, 0)$ และมีรัศมีวงกลมยาวหนึ่งหน่วย ซึ่งจะเรียกวงกลมนี้ว่า วงกลมหนึ่งหน่วย (Unit Circle) จากจุด A ลากรัศมี OA โดย OA ทำมุม θ กับแกน x และลากเส้นขนานกับแกน y ตัดแกน x ที่จุด B(x, 0) โดย AB มีความยาวเท่ากับ y หน่วย และ OB มีความยาว x หน่วย เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OBA

พิจารณาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม θ จะพบว่า

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{AB}{OA} = \frac{y}{1} = y \\ \cos \theta &= \frac{OB}{OA} = \frac{x}{1} = x \\ \tan \theta &= \frac{AB}{OB} = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ \csc \theta &= \frac{OA}{AB} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin \theta} \\ \sec \theta &= \frac{OA}{OB} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos \theta} \\ \cot \theta &= \frac{OB}{AB} = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\end{aligned}$$

ข้อสังเกต 3.1 จากอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม θ โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย จะพบว่าค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม จะมีความสัมพันธ์กับพิกัดของจุด $A(x, y)$ ซึ่งค่าพิกัดบนแกน y คือค่าของ $\sin \theta$ และค่าพิกัดบนแกน x คือค่าของ $\cos \theta$ และค่าของ $\tan \theta = \frac{\text{ค่าพิกัดบนแกน } y}{\text{ค่าพิกัดบนแกน } x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

พิจารณารูป ต่อไปนี้



รูปที่ 3.1 : วงกลมหนึ่งหน่วย

อัตราส่วนตรีโกณมิติใน จตุภาค

- จตุภาคที่ 1
- จตุภาคที่ 2

จากรูปที่ 3.4 ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม $\pi - \theta$ หรือ $180^\circ - \theta$ กับ θ ได้ดังนี้

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(180^\circ - \theta) = y = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = \cos(180^\circ - \theta) = -x = -\cos \theta$$

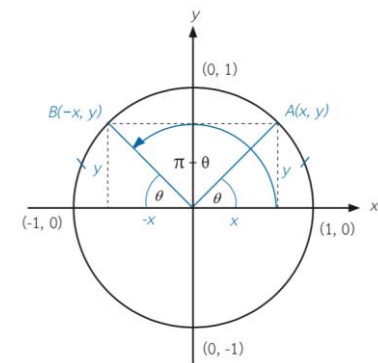
$$\tan(\pi - \theta) = \tan(180^\circ - \theta) = \frac{y}{-x} = -\tan \theta$$

$$\csc(\pi - \theta) = \csc(180^\circ - \theta) = \frac{1}{y} = \csc \theta$$

$$\sec(\pi - \theta) = \sec(180^\circ - \theta) = \frac{1}{-x} = -\sec \theta$$

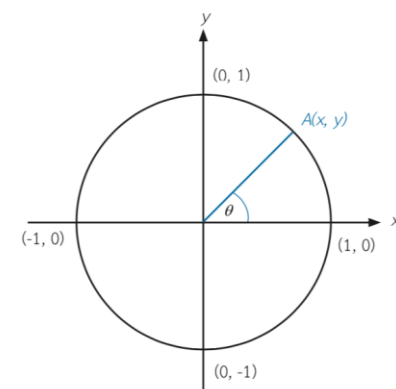
$$\cot(\pi - \theta) = \cot(180^\circ - \theta) = \frac{-x}{y} = -\cot \theta$$

$$\text{เช่น } \sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} \text{ หรือ } \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$$



รูปที่ 3.4 : มุมในจตุภาคที่ 2

1. จตุภาคที่ 1 ค่าของ x เป็นบวก ค่าของ y เป็นบวก
2. จตุภาคที่ 2 ค่าของ x เป็นลบ ค่าของ y เป็นบวก
3. จตุภาคที่ 3 ค่าของ x เป็นลบ ค่าของ y เป็นลบ
4. จตุภาคที่ 4 ค่าของ x เป็นบวก ค่าของ y เป็นลบ



รูปที่ 3.3 : มุมในจตุภาคที่ 1

อัตราส่วนตรีโกณมิติ ในจตุภาค จตุภาคที่ 3

จากรูปที่ 3.5 ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม $\pi + \theta$ หรือ $180^\circ + \theta$ กับ θ ได้ดังนี้

$$\sin(\pi + \theta) = \sin(180^\circ + \theta) = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = \cos(180^\circ + \theta) = -x = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan(180^\circ + \theta) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

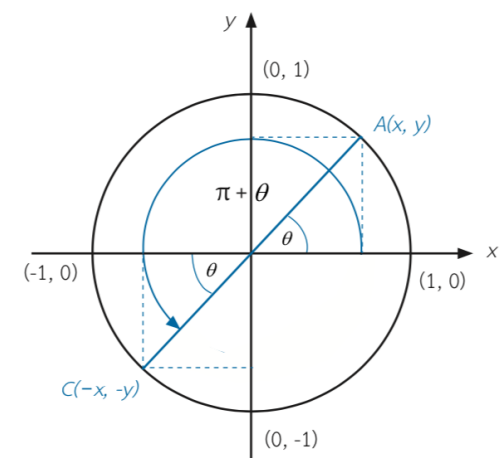
$$\csc(\pi + \theta) = \csc(180^\circ + \theta) = \frac{1}{-y} = -\csc\theta$$

$$\sec(\pi + \theta) = \sec(180^\circ + \theta) = \frac{1}{-x} = -\sec\theta$$

$$\cot(\pi + \theta) = \cot(180^\circ + \theta) = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} = \cot\theta$$

$$\text{เช่น } \sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} \text{ หรือ } \sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ$$

ดังนั้น ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ tangent และ cotangent ของมุมในจตุภาคที่ 3 มีค่าเป็นบวก ส่วน sine, cosine, cosecant และ secant ของมุมในจตุภาคที่ 3 มีค่าเป็นลบ



รูปที่ 3.5 : มุมในจตุภาคที่ 3

อัตราส่วนตรีโกณมิติ ในจตุภาค จตุภาคที่ 4

จากรูปที่ 3.6 ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม $2\pi + \theta$ หรือ $360^\circ + \theta$ กับ θ ได้ดังนี้

$$\sin(2\pi - \theta) = \sin(360^\circ - \theta) = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(360^\circ - \theta) = x = \cos\theta$$

$$\tan(2\pi - \theta) = \tan(360^\circ - \theta) = \frac{-y}{x} = -\tan\theta$$

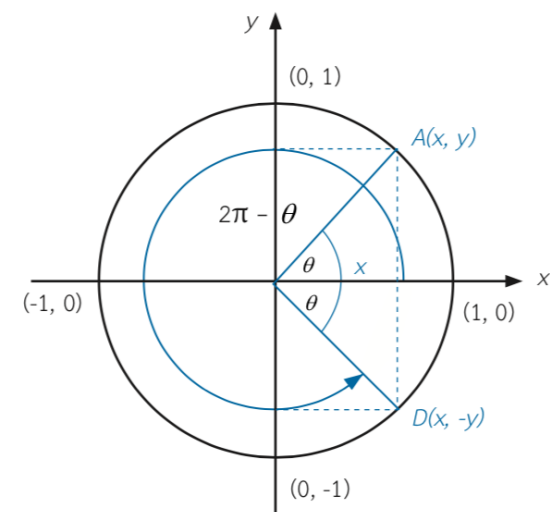
$$\csc(2\pi - \theta) = \csc(360^\circ - \theta) = \frac{1}{-y} = -\csc\theta$$

$$\sec(2\pi - \theta) = \sec(360^\circ - \theta) = \frac{1}{x} = \sec\theta$$

$$\cot(2\pi - \theta) = \cot(360^\circ - \theta) = \frac{x}{-y} = -\cot\theta$$

$$\text{เช่น } \sin \frac{7\pi}{4} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} \text{ หรือ } \sin 315^\circ = \sin(360^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ$$

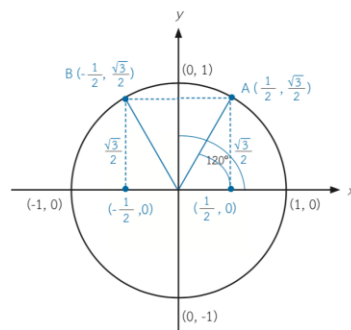
ดังนั้น ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ cosine และ secant ของมุมในจตุภาคที่ 4 มีค่าเป็นบวก ส่วนค่า sine, tangent, cosecant และ cotangent ของมุมในจตุภาคที่ 4 มีค่าเป็นลบ



รูปที่ 3.6 : มุมในจตุภาคที่ 4

อัตราส่วนตรีโกณมิติใน จตุภาค

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 120°



วิธีทำ จากรูปจะพบว่ามุม 120° อยู่ในจตุภาคที่ 2 ซึ่งมีความสัมพันธ์กับมุม 60°

โดยมุม $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ ดังนั้น ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 120° จะได้ดังนี้

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = -\sqrt{3}$$

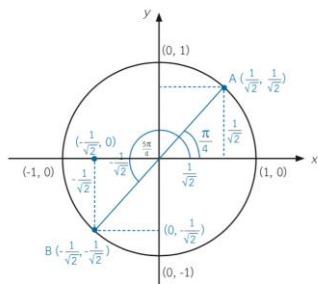
$$\csc 120^\circ = \csc(180^\circ - 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ = \sec(180^\circ - 60^\circ) = -\sec 60^\circ = -\frac{1}{\cos 60^\circ} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$\cot 120^\circ = \cot(180^\circ - 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\tan 60^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม $\frac{5\pi}{4}$



วิธีทำ จากรูปจะพบว่ามุม $\frac{5\pi}{4}$ อยู่ในจตุภาคที่ 3 ซึ่งมีความสัมพันธ์กับมุม $\frac{\pi}{4}$ ที่กำหนด

โดยมุม $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$ ดังนั้น ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม $\frac{5\pi}{4}$ จะได้ดังนี้

$$\sin \frac{5\pi}{4} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

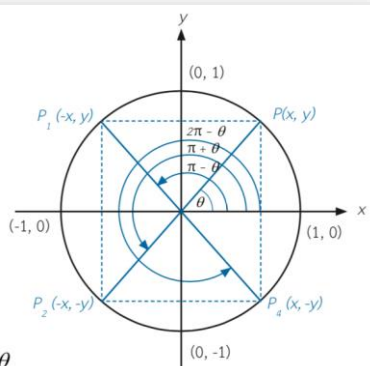
$$\tan \frac{5\pi}{4} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

$$\csc \frac{5\pi}{4} = \csc \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\csc \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

$$\sec \frac{5\pi}{4} = \sec \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sec \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

$$\cot \frac{5\pi}{4} = \cot \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \cot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

อัตราส่วนตรีโกณมิติในจตุภาค

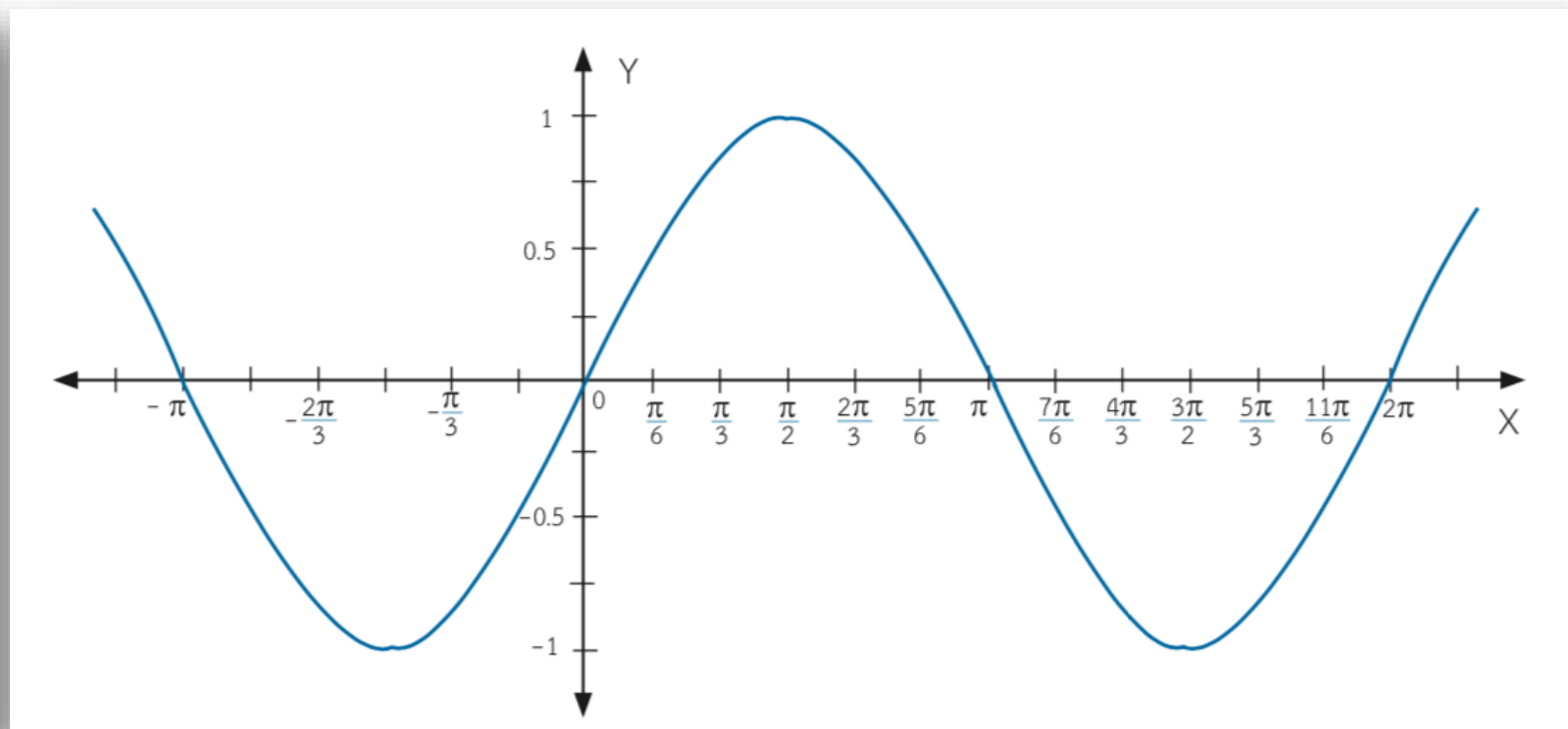


รูปที่ 3.7 : กราฟของมุม θ

มุม θ	ค่าของ $\sin\theta$	ค่าของ $\cos\theta$
$0^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	เพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง 1	ลดลงจาก 1 ถึง 0
$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$	ลดลงจาก 1 ถึง 0	ลดลงจาก 0 ถึง -1
$\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$	ลดลงจาก 0 ถึง -1	เพิ่มขึ้นจาก -1 ถึง 0
$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$	เพิ่มขึ้นจาก -1 ถึง 0	เพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง 1

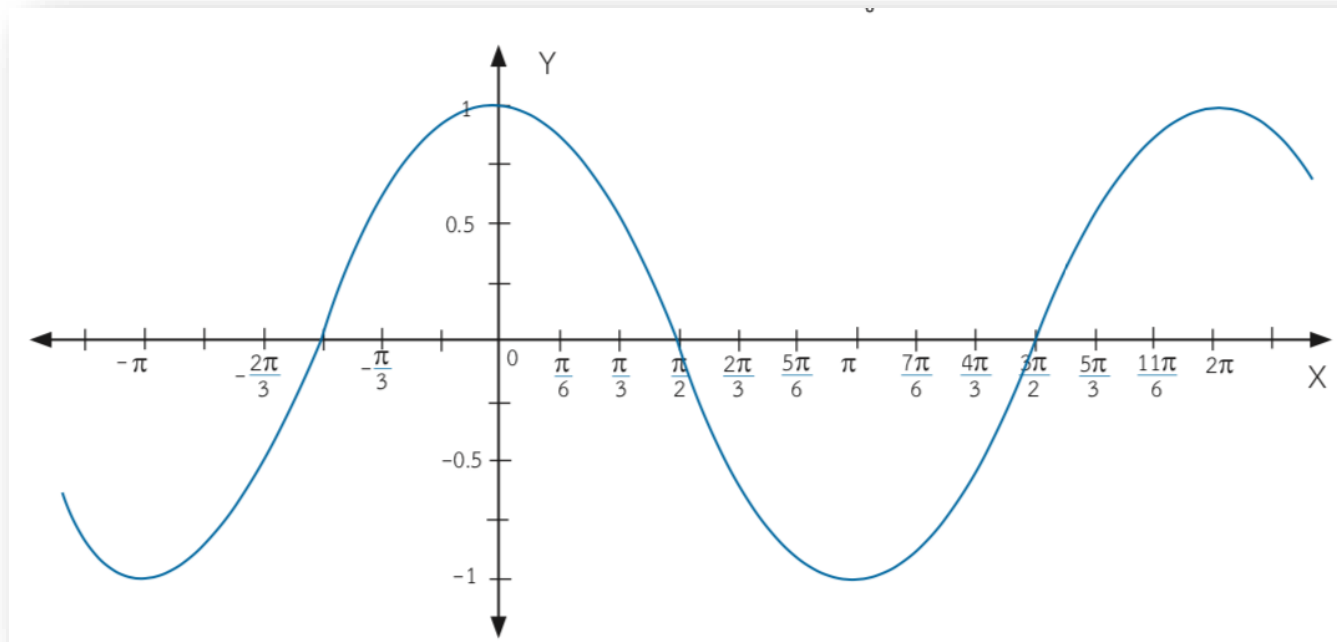
กราฟของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

x	sin x	x	sin x
0°	0	180° (π)	0
30° ($\frac{\pi}{6}$)	0.5	210° ($\frac{7\pi}{6}$)	-0.5
60° ($\frac{\pi}{3}$)	0.87	240° ($\frac{4\pi}{3}$)	-0.87
90° ($\frac{\pi}{2}$)	1	270° ($\frac{3\pi}{2}$)	-1
120° ($\frac{2\pi}{3}$)	0.87	300° ($\frac{5\pi}{3}$)	-0.87
150° ($\frac{5\pi}{6}$)	0.5	330° ($\frac{11\pi}{6}$)	-0.5
180° (π)	0	360° (2π)	0



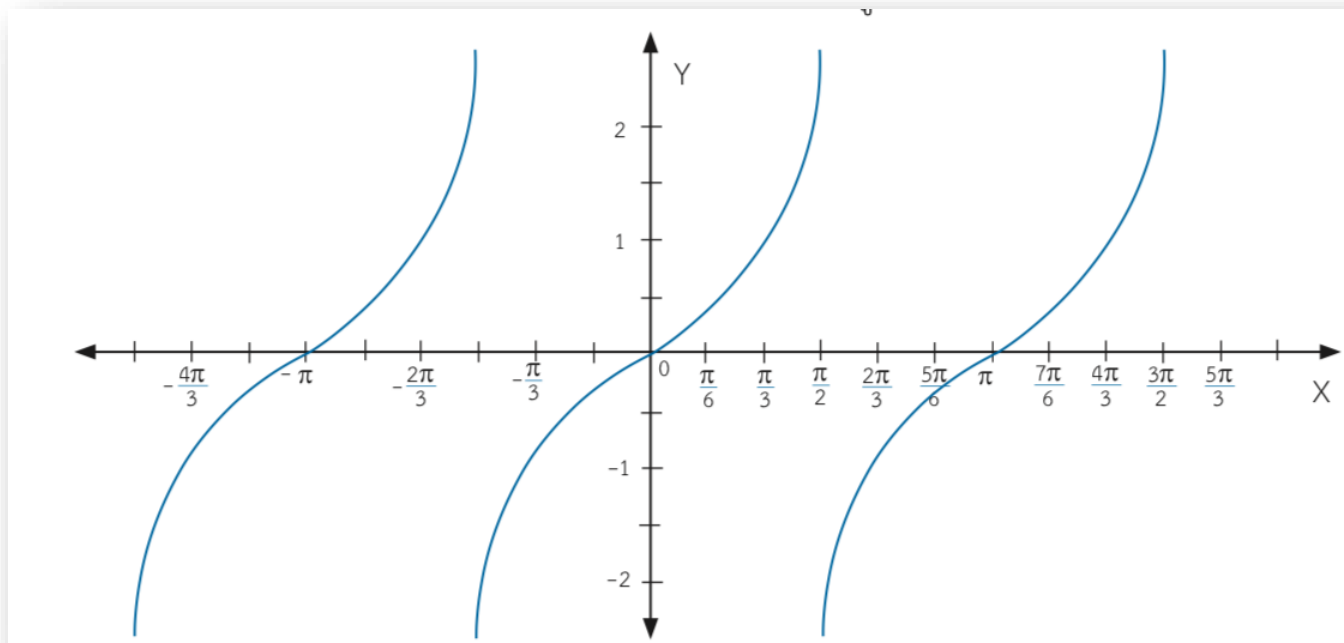
กราฟของ **SIN X**

x	cos x	x	cos x
0°	1	180° (π)	-1
30° ($\frac{\pi}{6}$)	0.87	210° ($\frac{7\pi}{6}$)	-0.87
60° ($\frac{\pi}{3}$)	0.5	240° ($\frac{4\pi}{3}$)	-0.5
90° ($\frac{\pi}{2}$)	0	270° ($\frac{3\pi}{2}$)	0
120° ($\frac{2\pi}{3}$)	-0.5	300° ($\frac{5\pi}{3}$)	0.5
150° ($\frac{5\pi}{6}$)	-0.87	330° ($\frac{11\pi}{6}$)	0.87
180° (π)	-1	360° (2π)	1



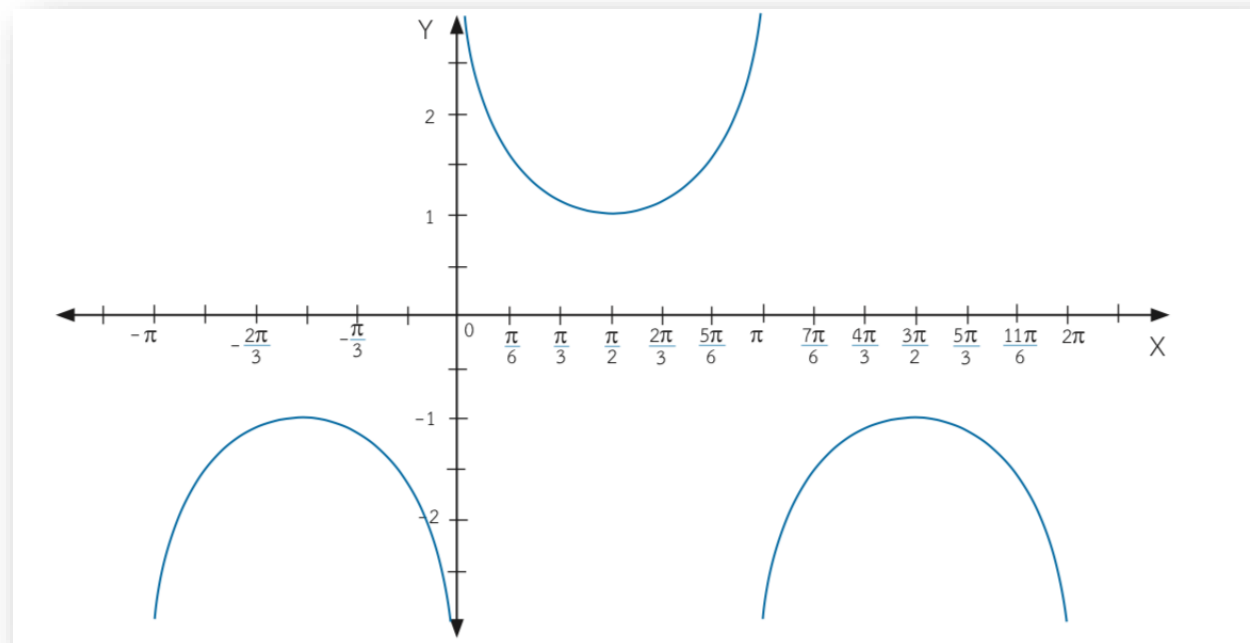
กราฟของ $\cos x$

x	tan x	x	tan x
0°	0	180° (π)	0
30° ($\frac{\pi}{6}$)	0.6	210° ($\frac{7\pi}{6}$)	0.6
60° ($\frac{\pi}{3}$)	1.7	240° ($\frac{4\pi}{3}$)	1.7
90° ($\frac{\pi}{2}$)	$\pm \infty$	270° ($\frac{3\pi}{2}$)	$\pm \infty$
120° ($\frac{2\pi}{3}$)	-1.7	300° ($\frac{5\pi}{3}$)	-1.7
150° ($\frac{5\pi}{6}$)	-0.6	330° ($\frac{11\pi}{6}$)	-0.6
180° (π)	0	360° (2π)	0



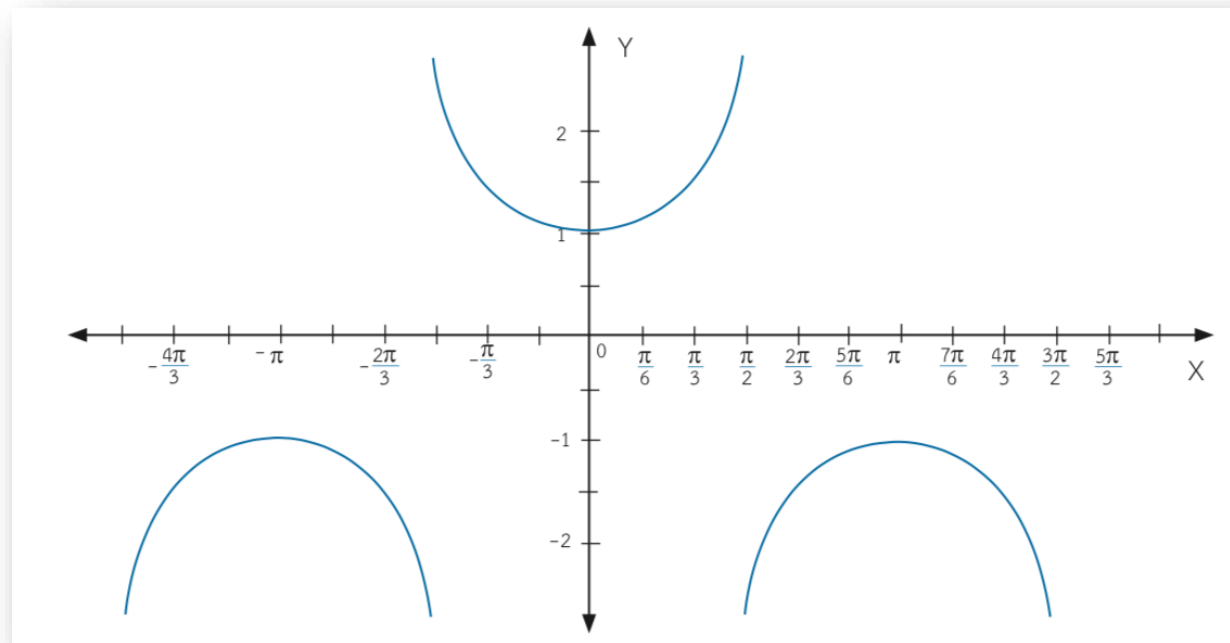
กราฟของ **TAN X**

X	csc X	X	csc X
0°	$\pm \infty$	180° (π)	$\pm \infty$
30° ($\frac{\pi}{6}$)	2	210° ($\frac{7\pi}{6}$)	-2
60° ($\frac{\pi}{3}$)	1.2	240° ($\frac{4\pi}{3}$)	-1.2
90° ($\frac{\pi}{2}$)	1	270° ($\frac{3\pi}{2}$)	-1
120° ($\frac{2\pi}{3}$)	1.2	300° ($\frac{5\pi}{3}$)	-1.2
150° ($\frac{5\pi}{6}$)	2	330° ($\frac{11\pi}{6}$)	-2
180° (π)	$\pm \infty$	360° (2π)	$\pm \infty$



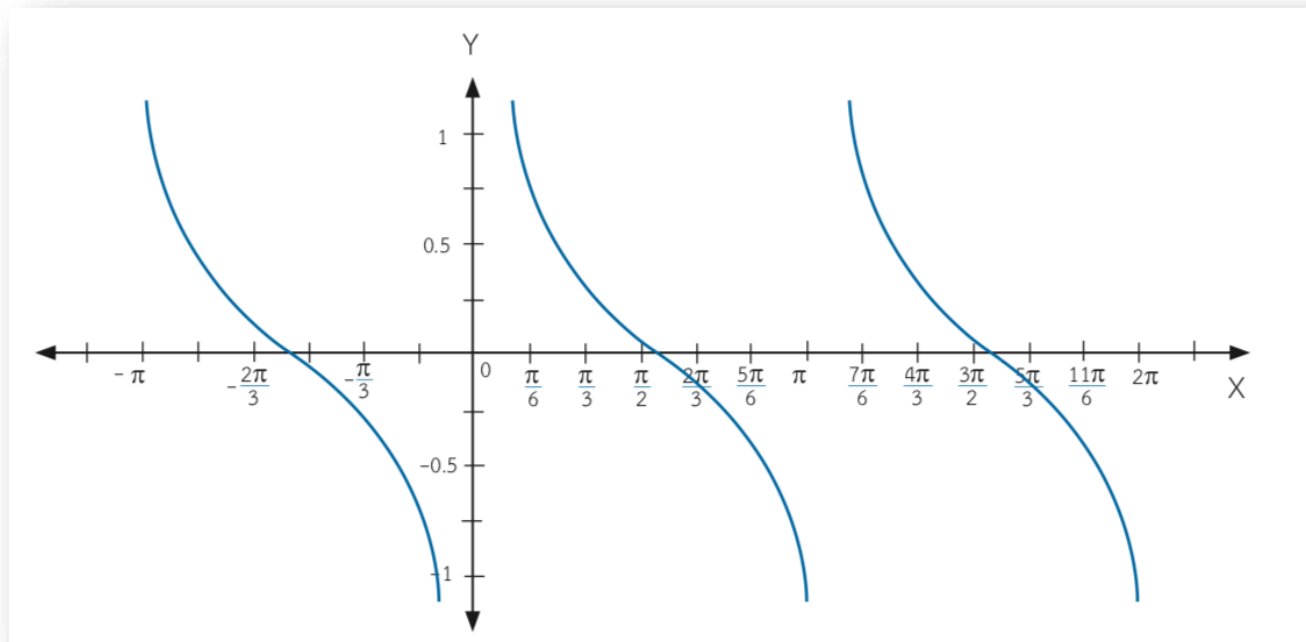
กราฟของ $\text{CSC } X$

x	tan x	x	tan x
0°	1	180° (π)	-1
30° ($\frac{\pi}{6}$)	1.2	210° ($\frac{7\pi}{6}$)	-1.2
60° ($\frac{\pi}{3}$)	2	240° ($\frac{4\pi}{3}$)	-2
90° ($\frac{\pi}{2}$)	$\pm \infty$	270° ($\frac{3\pi}{2}$)	$\pm \infty$
120° ($\frac{2\pi}{3}$)	-2	300° ($\frac{5\pi}{3}$)	2
150° ($\frac{5\pi}{6}$)	-1.2	330° ($\frac{11\pi}{6}$)	1.2
180° (π)	-1	360° (2π)	1



กราฟของ **SEC X**

x	cot x	x	cot x
0°	$\pm\infty$	180° (π)	$\pm\infty$
30° ($\frac{\pi}{6}$)	1.7	210° ($\frac{7\pi}{6}$)	1.7
60° ($\frac{\pi}{3}$)	0.6	240° ($\frac{4\pi}{3}$)	0.6
90° ($\frac{\pi}{2}$)	0	270° ($\frac{3\pi}{2}$)	0
120° ($\frac{2\pi}{3}$)	-0.6	300° ($\frac{5\pi}{3}$)	-0.6
150° ($\frac{5\pi}{6}$)	-1.7	330° ($\frac{11\pi}{6}$)	-1.7
180° (π)	$\pm\infty$	360° (2π)	$\pm\infty$



กราฟของ **COT X**