

ศูนย์ส่งเสริมอาชีพ

ศ ส อ

ทักษะสร้างอนาคต

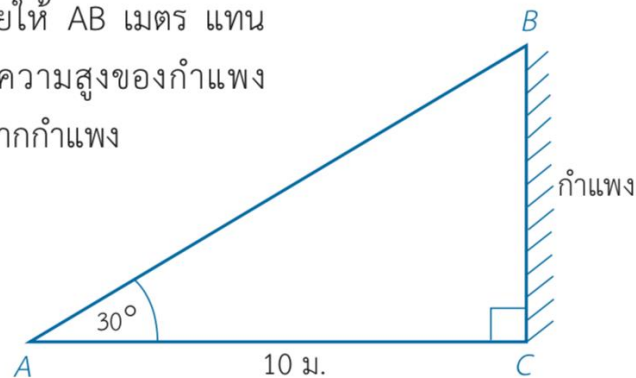
คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

4



ตัวอย่างที่ 4.1 พาดบันไดไว้กับกำแพง โดยให้ปลายบันไดตอนบนจดขอบกำแพงพอดี โดยโคนบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 10 เมตร และทำมุม 45° กับพื้นดิน จงหาความยาวของบันไดและความสูงของกำแพง

วิธีทำ จากโจทย์สามารถนำมาสร้างรูป โดยให้ AB เมตร แทนความยาวของบันได BC เมตร แทนความสูงของกำแพง และ AC เมตร แทนโคนบันไดอยู่ห่างจากกำแพง



1. หาความยาวของบันได BC

จากรูป สามเหลี่ยมมุมฉาก ACB จะได้

$$\frac{AB}{AC} = \sec 30^\circ$$

ดังนั้น $\frac{AB}{10} = 1.155$ (ตารางหน้า 36 ค่า $\sec 30^\circ = 1.155$)

$AB = 1.155 \times 10 = 11.55$ เมตร **ตอบ**

2. หาความสูงของกำแพง BC

จากรูป สามเหลี่ยมมุมฉาก ACB จะได้

$$\frac{BC}{AC} = \tan 30^\circ$$

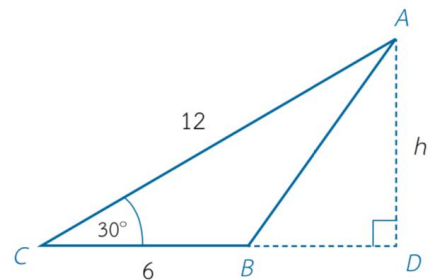
ดังนั้น $\frac{BC}{10} = 0.5774$ (ตารางหน้า 36 ค่า $\tan 30^\circ = 0.5774$)

$BC = 0.5774 \times 10 = 5.774$ เมตร **ตอบ**

การประยุกต์ของตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC ที่มีด้าน $a = 6$ หน่วย $b = 12$ หน่วย และมุม $C = 30^\circ$
จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้

วิธีทำ 1. จากโจทย์นำมาสร้างรูปได้ดังนี้



จากจุด A ลากเส้น AD ตั้งฉากกับส่วนต่อของ CB ที่จุด D จะได้ AD เป็นส่วนสูงของ
สามเหลี่ยม ABC ให้ AD ยาว h หน่วย

$$2. \text{ จากพื้นที่สามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{2} \times 6 \times h$$

$$3. \text{ หาค่า } h \text{ จาก สามเหลี่ยมมุมฉาก ADC}$$

$$\frac{h}{12} = \sin 30^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } h = 12 \sin 30^\circ$$

$$= 12 \times 0.5 \quad (\sin 30^\circ = 0.5)$$

$$= 6$$

$$4. \text{ จากพื้นที่สามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{2} \times 6 \times h$$

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 6$$

$$= \frac{1}{2} \times 36$$

$$= 18 \text{ ตารางหน่วย}$$

ตอบ

หมายเหตุ 4.1 จากตัวอย่างที่ 5.2 สามารถหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมได้จากสูตร

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของความยาวด้านประกอบมุมที่กำหนด} \times \text{ค่า sin ของมุมที่กำหนด}$$

$$\text{เพราะพื้นที่สามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \text{ ซึ่งฐานยาว 6 หน่วย และสูง } 12 \sin 30^\circ$$

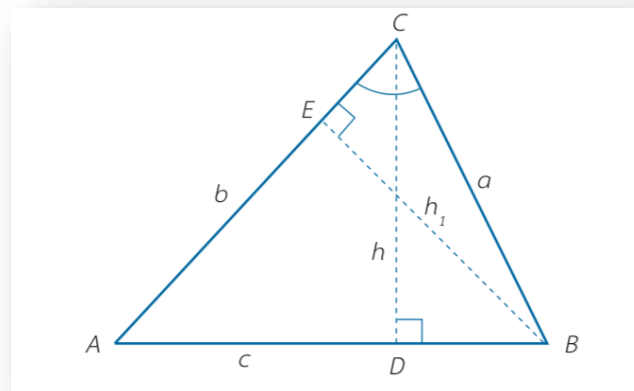
$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 12 \times 0.5$$

$$= 18 \text{ ตารางหน่วย}$$

การประยุกต์ของตรีโกณมิติ

กฎของไซน์



พิสูจน์ จากจุด C ลากเส้นตั้งฉากกับ AB ที่จุด D จะได้ CD เป็นส่วนสูงของสามเหลี่ยม ABC ให้ความยาวของด้าน CD ยาว h หน่วย

1) พิสูจน์ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC และ BDC

$\sin A = \frac{h}{b}$ หรือ $h = b \sin A$ ①

$\sin B = \frac{h}{a}$ หรือ $h = a \sin B$ ②

① = ② จะได้ $b \sin A = a \sin B$

หรือ $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ ③

2) พิสูจน์ $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

จากจุด B ลากเส้นตั้งฉากกับ AC ที่จุด E จะได้ BE เป็นส่วนสูงของสามเหลี่ยม ABC ให้ความยาวของด้าน BE ยาว h_1 หน่วย

จากรูป หาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

จากสูตร พื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

ดังนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2} \times c \times h$
 $= \frac{1}{2} \times c \times b \sin A$ ④

หรือ พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2} \times b \times h_1$

จากรูป สามเหลี่ยมมุมฉาก BCE

$\sin C = \frac{h_1}{a}$

$h_1 = a \sin C$

ดังนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2} \times b \times a \sin C$ ⑤

④ = ⑤ จะได้ $\frac{1}{2} \times c \times b \sin A = \frac{1}{2} \times b \times a \sin C$

หรือ $c \sin A = a \sin C$

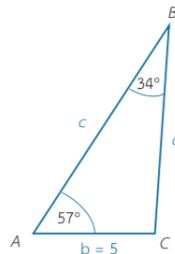
$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ ⑥

③ = ⑥ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

กฎของไซน์

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ โดยที่ $b = 5$ หน่วย มุม $A = 57^\circ$ มุม $B = 34^\circ$ ความยาวของ a และ c จะเป็นเท่าใด โดยค่าของมุมให้ดูจากค่าตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติ หน้า 36 - 38

วิธีทำ 1. จากโจทย์นำมาสร้างรูปได้ดังนี้



2. จากโจทย์ต้องการหา a ซึ่งเป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A และ c ซึ่งเป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม C

3. หาค่าของมุม C จากผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เท่ากับ 180°

จะได้ว่า $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ เนื่องจาก $\hat{A} = 57^\circ$ และ $\hat{B} = 34^\circ$

ดังนั้น $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 57^\circ - 34^\circ = 89^\circ$

4. จากกฎของไซน์ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{a}{\sin 57^\circ} = \frac{5}{\sin 34^\circ}$$

$$a = \frac{5 \sin 57^\circ}{\sin 34^\circ}$$

$$= \frac{5 \times 0.839}{0.559}$$

$$= 7.504 \text{ หน่วย}$$

5. ในทำนองเดียวกัน จากกฎของไซน์

$$\text{จะได้ว่า } \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{c}{\sin 89^\circ} = \frac{5}{\sin 34^\circ}$$

$$c = \frac{5 \sin 89^\circ}{\sin 34^\circ}$$

$$= \frac{5 \times 0.999}{0.559}$$

$$= 8.935 \text{ หน่วย}$$

ตัวอย่างที่ 4.4 กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุม $C = 60^\circ$ $a = 2$ หน่วย

$c = \sqrt{6}$ หน่วย และ $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ จงหาค่าของมุม A

วิธีทำ จากกฎของไซน์

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$

$$\sin A = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ \text{ หรือ } \sin (180^\circ - 45^\circ)$$

$$A = 45^\circ \text{ หรือ } 135^\circ$$

เพราะฉะนั้น มุม $A = 45^\circ$ หรือ 135° แต่ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมจะมีค่าได้เท่ากับ 180° เท่านั้น พิจารณามุม $A + C$ จะได้

$$45^\circ + 60^\circ < 180^\circ$$

$$\text{แต่ } 135^\circ + 60^\circ > 180^\circ$$

$$\text{ดังนั้น มุม } A = 45^\circ$$

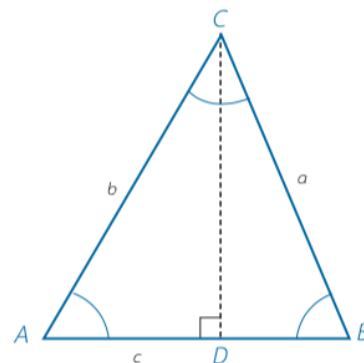
ข้อสังเกต 4.1 การใช้กฎของไซน์มีหลักการพิจารณา ดังนี้

1. โจทย์กำหนด มุมมาสองมุมและด้านหนึ่งด้าน

2. มุมที่กำหนดต้องเป็นมุมตรงข้ามกับด้านใดด้านหนึ่งของสองด้านที่กำหนด

กฎของโคไซน์

พิสูจน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$



พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC และสามเหลี่ยม ABC จะได้

$$AD = b \cos A$$

$$CD = b \sin A$$

$$BD = c - AD$$

$$= c - b \cos A$$

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ โดยที่ a แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม A b แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม B และ c แทน ความยาวของด้านตรงข้ามมุม C แล้ว

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

พิสูจน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BDC และโดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$3C^2 = BD^2 + CD^2$$

$$a^2 = (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2$$

$$= c^2 - 2bc \cos A + (b \cos A)^2 + (b \sin A)^2$$

$$= c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A$$

$$= c^2 - 2bc \cos A + b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A)$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\sin^2 A + \cos^2 A = 1)$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{และ} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

หมายเหตุ 4.2 ถ้ามุม $A = 90^\circ$ หรือ $B = 90^\circ$ หรือ $C = 90^\circ$ จะได้ว่า

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \because \cos 90^\circ = 0$$

กฎของโคไซน์

ตัวอย่างที่ 4.5 กำหนดให้ $a = 7$ หน่วย $b = 3$ หน่วย $c = 5$ หน่วย และ $\cos 60^\circ = 0.5$
จงหาค่าของมุม A ในหน่วยองศา

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{9 + 25 - 49}{30} \\ &= \frac{-15}{30} \\ &= -0.5\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\cos 60^\circ = 0.5$ และ $\cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$

$$\begin{aligned}\text{จาก } \cos A &= -0.5 \\ &= -\cos 60^\circ \\ &= \cos (180^\circ - 60^\circ) = \cos 120^\circ\end{aligned}$$

ดังนั้น มุม $A = 120^\circ$

ตัวอย่างที่ 4.4 ABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ โดยที่ $b = 8$ หน่วย มุม $A = 60^\circ$ มุม $c = 5$ หน่วย
จงหาความยาวของ a จะเป็นเท่าใด

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ \\ &= 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)(0.5) \\ &= 64 + 25 - 40 \\ &= 49 \\ a &= 7\end{aligned}$$

ดังนั้น $a = 7$ หน่วย

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{bc}{2bc} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 0.5 \\ &= \cos 60^\circ \text{ (จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ } \cos 60^\circ = 0.5) \\ A &= 60^\circ \\ \text{ดังนั้น มุม } A &= 60^\circ\end{aligned}$$

ข้อสังเกต 4.2 การใช้กฎของไซน์ มีหลักการพิจารณาดังนี้

1. หาด้าน เมื่อโจทย์กำหนดด้านสองด้านกับมุมระหว่างด้านทั้งสอง
2. หามุม เมื่อโจทย์กำหนดด้านมาสามด้านหรือสัดส่วนของด้านทั้งสามหรือ

ความสัมพันธ์ของด้านทั้งสาม

ตัวอย่างที่ 4.6 สามเหลี่ยม ABC มีด้าน a, b, c เป็นด้านตรงข้ามของมุม A, B และ C ตามลำดับ
และความสัมพันธ์เป็น $(a + b + c)(b + c - a) = 3ab$ จงหาค่าของมุม A

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ $(a + b + c)(b + c - a) = 3ab$ จัดรูปแบบใหม่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}[(b + c) + a][(b + c) - a] &= 3bc \\ (b + c)^2 - a^2 &= 3bc \\ b^2 + 2bc + c^2 - a^2 &= 3bc \\ \therefore a^2 &= b^2 + c^2 - bc \quad \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

$$\text{จากกฎของโคไซน์ } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \dots\dots\dots (2)$$

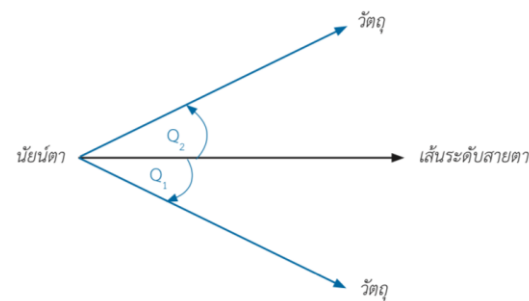
$$(2) = (1) \text{ จะได้ } b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc$$

$$b^2 + c^2 - b^2 - c^2 + bc = 2bc \cos A$$

$$bc = 2bc \cos A$$

โจทย์ปัญหาตรีโกณมิติ

■ มุมก้มและมุมเงย



มุมก้ม (Q_1) คือ มุมที่เกิดจากเส้นระดับสายตาทำกับเส้นที่ลากจากนัยน์ตาไปยังวัตถุที่อยู่ใต้เส้นระดับสายตา

มุมเงย (Q_2) คือ มุมที่เกิดจากเส้นระดับสายตาทำกับเส้นที่ลากจากนัยน์ตาไปยังวัตถุที่อยู่เหนือเส้นระดับสายตา

หมายเหตุ มุมก้มและมุมเงยจะต้องวัดจากแนวระดับสายตาเสมอ

ตัวอย่างที่ 4.6 สมชายยืนอยู่บนอาคารเรียนซึ่งอยู่ห่างจากสมหญิงที่อยู่บนสนามหญ้า เป็นระยะทาง 30 เมตร ถ้ามุมเงยที่สมหญิงมองไปยังสมชายเป็นมุม 60° อยากทราบว่าจุดที่สมชายยืนจะสูงกว่าระดับพื้นสนามหญ้าที่สมหญิงอยู่กี่เมตร เมื่อสมหญิงสูง 155 เซนติเมตร (กำหนด $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$)

วิธีทำ จากโจทย์เขียนรูปได้ดังนี้



กำหนดให้ C เป็นจุดที่สมชายยืนอยู่บนอาคารเรียน
กำหนดให้ D เป็นจุดที่สมหญิงยืนอยู่ที่สนาม โดย AD คือ ความสูงของสมหญิง
 AB คือ เส้นระดับสายตาสมหญิงมองไปยังอาคารเรียนซึ่งห่างกัน 30 เมตร
 BC คือ ความสูงของตึกจากแนวระดับสายตา
มุม A คือ มุมเงยที่สมหญิงมองไปยังสมชายซึ่งทาง 60°
จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จะได้

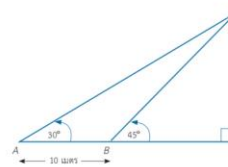
$$\begin{aligned}\tan A &= \frac{BC}{AB} \\ \tan 60^\circ &= \frac{BC}{30} \\ \therefore BC &= 30 \tan 60^\circ \\ &= 30 \times \sqrt{3} = 30 \times 1.732 \quad (\sqrt{3} \approx 1.732) \\ &= 51.96\end{aligned}$$

เนื่องจากสมหญิงสูง 155 เซนติเมตร แสดงว่า $AD = 155$ เซนติเมตร แต่ $AD = BE$
ดังนั้น $BE = 15.96$ เซนติเมตร

ความสูง ณ จุดที่สมชายยืนอยู่ คือ $EB + BC = 51.96 + 1.55 = 53.51$ เมตร **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.7 กำหนดให้จุดสังเกต A อยู่บนพื้นดิน เห็นมุมเงยของยอดต้นไม้เป็นมุม 30° และเมื่อเลื่อนจุดสังเกตเข้าไปด้านในอีก 10 เมตร มุมเงยของยอดต้นไม้เปลี่ยนไปเป็นมุม 45° อยากทราบว่าต้นไม้มีกี่เมตร

วิธีทำ จากโจทย์เขียนรูปได้ดังนี้



กำหนดให้ จุด A และจุด B เป็นจุดสังเกตบนพื้นดิน CD เป็นความสูงของต้นไม้
ความยาวของ $AB = 10$ เมตร

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{AD}{CD} &= \cot 30^\circ \\ &= \sqrt{3} \\ \therefore AD &= \sqrt{3} CD \quad \text{..... (1)}\end{aligned}$$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BDC จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{BD}{CD} &= \cot 45^\circ \\ &= 1 \\ \therefore BD &= CD \quad \text{..... (2)}\end{aligned}$$

นำ (1) - (2) จะได้ว่า

$$AD - BD = \sqrt{3} CD - CD$$

เนื่องจาก

$$AD - BD = AB$$

$$= 10$$

$$\therefore 10 = (\sqrt{3} - 1)CD$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } CD &= \frac{10}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{10}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{10(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} \\ &= 5(\sqrt{3} + 1) = 5(1.732 + 1) = 5 \times 2.732 \\ &= 13.66\end{aligned}$$

ดังนั้น ต้นไม้มีความสูงเท่ากับ 13.66 เมตร

ตอบ

โจทย์ปัญหาตรีโกณมิติ