

ศูนย์ส่งเสริมอาชีพ

ศ ส อ

ทักษะสร้างอนาคต

คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

7



การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

บทนิยาม 7.1 ระบบสมการเชิงเส้น คือ ระบบสมการที่มีตัวแปรมากกว่า 1 ตัวแปร โดยที่เลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็น 1 และไม่มีการคูณกันของตัวแปร เช่น

$$x + y = 5$$

$$3x - 4y = 0$$

พิจารณาประโยคต่อไปนี้

หนังสือแพงกว่าสมุด 10 บาท และทั้งสองอย่างราคารวมกัน 50 บาท อยากทราบว่าราคาสมุดและดินสอเป็นเท่าไร จะมีวิธีการหาคำตอบได้อย่างไร เช่น กำหนดให้ x แทนราคาของหนังสือ y แทนราคาของสมุด ต่อไปสร้างสมการตามเงื่อนไขของโจทย์จะได้ว่า

$$x - y = 10 \quad (8.1)$$

$$x + y = 50 \quad (8.2)$$

จากสมการที่ (8.1) และ (8.2) เป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปร 2 ตัวแปร การแก้ระบบสมการเชิงเส้นก็คือการหาค่าของตัวแปรที่อยู่ในระบบสมการนั้น

$$\text{กำหนดให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } \det A = (1 \times 4) - (3 \times 2) = -2$$

$$\text{จาก } \text{adj}(A) = [c_j^i]^T$$

$$\text{ให้ } C = [c_j^i]^T$$

$$\text{จะได้ } c_{11} = (-1)^{1+1}(4) = 1 \times 4 = 4$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}(3) = -1 \times 3 = -3$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}(2) = -1 \times 2 = -2$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}(1) = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{ดังนั้น } C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{หา } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 - 6 & -2 + 2 \\ 12 - 12 & -6 + 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{สรุป } A \cdot \text{adj}(A) = \det A \cdot I$$

$$\text{หรือ } \frac{1}{\det A} \cdot A \cdot \text{adj}(A) = I$$

$$\text{นำ } A^{-1} \text{ คูณทั้งสองข้างของสมการ}$$

$$A^{-1} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot A \cdot \text{adj}(A) = A^{-1} \cdot I$$

ทฤษฎีบท 7.1 ถ้า A เป็นเมทริกซ์สามารถหา A^{-1} ได้เมื่อ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$

พิสูจน์ สำหรับกรณีพิสูจน์ทฤษฎีบท 8.1 จะเริ่มจากการแสดงว่า $A \cdot \text{adj}(A) = \det A \cdot I$ เช่น กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $n \times n$ และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด $n \times n$ จะได้ว่า

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

จาก $A \cdot \text{adj}(A)$ จะพบว่าสมาชิกของแถวที่ i และหลักที่ j ของ $A \cdot \text{adj}(A)$ คือ

$$a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \dots + a_{in}c_{nj} \quad (8.3)$$

ซึ่งจะพิจารณาค่าของ i และ j เป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

1. ถ้า $i = j$ จะได้ว่า สมการ 8.3 = $\det A$

2. ถ้า $i \neq j$ จะได้ว่า สมการ 8.3 = 0

เพราะฉะนั้น

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot I \quad (8.4)$$

เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์สามารถหา A^{-1} ได้ และ $\det A \neq 0$ จากสมการที่ 8.4 สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{\det A} \cdot A \cdot \text{adj}(A) = I$$

หรือ

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A) = I \quad (8.5)$$

คูณสมการ 8.5 ทั้งสองข้างด้วย A^{-1} ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$ **จบ**

ซึ่งสามารถแทนได้ดังนี้

$$\frac{1}{\det A} A^{-1} \cdot A \cdot \text{adj} A = A^{-1}$$

$$\text{ดังนั้น } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A \text{ (เพราะ } A \cdot A^{-1} = I)$$

$$\text{จะได้ว่า } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{เนื่องจาก } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A) \text{ เพราะฉะนั้น}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 7.3 จงหาค่าของ A^{-1} เมื่อ กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10$ และ

$$C_{11} = |4|$$
$$= 4$$

$$C_{12} = -|1|$$
$$= -1$$

$$C_{21} = -|2|$$
$$= -2$$

$$C_{22} = |3|$$
$$= 3$$

เพราะฉะนั้น

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = 12 - 2 = 10$$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

การแก้ระบบสมการ เชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 7.4 จงหาค่าของ A^{-1} เมื่อกำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 12 + 8 + 12 - 20 - 4 = -2$$

ให้ $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 3) = 2$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 8) = 4$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

เนื่องจาก $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$ เพราะฉะนั้น

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -6 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -3 \\ 10 & -8 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(20 - 12) = -8$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 2) = -3$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 4 = -14$$

เพราะฉะนั้น

$$C = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -3 \\ 10 & -8 & -14 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -3 \\ 10 & -8 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ว่า } \text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -3 \\ 10 & -8 & -14 \end{bmatrix}$$

สมการเชิงเส้น ของตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ คือ สมการที่อยู่ในรูปของ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ และ b เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง โดยตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ต้องเป็นกำลังหนึ่งเท่านั้น

ระบบสมการเชิงเส้น ของตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ คือ ระบบสมการที่ประกอบด้วย สมการเชิงเส้นในตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ มากกว่าหนึ่งสมการ

ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้น m สมการในตัวแปร n ตัวแปรจะ เขียนอยู่ในรูป

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

โดยที่ a_{ij} และ b_i เป็นสมาชิกของจำนวนจริงใด ๆ

การแก้ระบบสมการ คือ การหาค่าตัวแปรซึ่งค่าตัวแปรจะเป็นคำตอบของระบบสมการ โดยทั่วไประบบสมการเชิงเส้นใด ๆ จะมีคำตอบแบบหนึ่งแบบใดต่อไปนี้เพียงแบบเดียว ดังนี้

1. ระบบสมการมีคำตอบเดียว
2. ระบบสมการมีคำตอบอนันต์
3. ระบบสมการไม่มีคำตอบ

ถ้ากำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ระบบสมการนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น $AX = B$ ในกรณีที่เมทริกซ์ A มีเมทริกซ์ผกผัน จะได้ว่า

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

ดังนั้น $X = A^{-1}B$ เรียก x ว่าเป็นเมทริกซ์คำตอบของระบบสมการ

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

ตัวอย่างที่ 7.5 จงแก้ระบบสมการ

$$2x_1 - 2x_2 = 8$$

$$3x_1 + 3x_2 = 12$$

วิธีทำ จากโจทย์จะแสดงวิธีการแก้สมการตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. นำค่าสัมประสิทธิ์และค่าคงที่ในระบบสมการมาสร้างเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

2. หาค่าของ $\text{adj}(A)$ จะได้ว่า

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \times 3 = 3$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \times 3 = -3$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \times (-2) = (-1) \times (-2) = 2$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \times (2) = 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

3. หาค่าของ $\det A$ จะได้ว่า

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ = 12$$

4. หาค่าของ A^{-1} ($\det A \neq 0$) จาก $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$ จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

5. หาค่าของเมทริกซ์ X จาก $X = A^{-1}B$ จะได้ว่า

$$X = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} (3 \times 8) + (2 \times 12) \\ (-3 \times 8) + (2 \times 12) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 48 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \times 48 \\ \frac{1}{12} \times 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x_1 = 4$ และ $x_2 = 0$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

การแก้ระบบสมการ เชิงเส้นโดยใช้เมท ริกซ์ผกผัน

ตัวอย่างที่ 7.6 จงแก้ระบบสมการ

$$2a - b + 3c = 2$$

$$3a - 2b + c = 4$$

$$a + 2b - c = 0$$

วิธีทำ จากโจทย์จะแสดงวิธีการแก้สมการตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. นำค่าสัมประสิทธิ์และค่าคงที่ในระบบสมการมาสร้างเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. หาค่าของ adj(A) จะได้ว่า

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \{(-2)(-1) - (2 \times 1)\} = 2 - 2 = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\{3 \times (-1) - (1 \times 1)\} = -(-3 - 1) = -(-4) = 4$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3 \times 2) - \{1 \times (-2)\} = 6 - (-2) = 6 + 2 = 8$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\{(-1) \times (-1) - (2 \times 3)\} = -(1 - 6) = -(-5) = 5$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \{2 \times (-1) - (1 \times 3)\} = -2 - 3 = -5$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\{(2 \times 2) - 1 \times (-1)\} = -(4 + 1) = -5$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 - (-2) \times 3 = 1 - (-6) = -1 + 6 = 5$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2 \times 1 - 3 \times 3) = -(2 - 9) = -(-7) = 7$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \{(2 \times (-2) - 3 \times (-1))\} = -4 + 3 = -1$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 5 & -5 & -5 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & -5 & 7 \\ 8 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. หาค่าของ det A โดยใช้การกระจายโดยเทอเนอร์ (ในข้อนี้เลือกแถวที่ 1) จะได้ว่า

$$\det A = \sum_{j=1}^3 a_{1j} C_{1j} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} = 2(0) + (-1)(4) + 3(8) = 0 - 4 + 24 = 20$$

4. หาค่าของ A^{-1} ($\det A \neq 0$) จาก $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$ จะได้

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & -5 & 7 \\ 8 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

5. หาค่าของเมทริกซ์ X จาก $X = A^{-1}B$ จะได้ว่า

$$X = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & -5 & 7 \\ 8 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} (0 \times 2) + (5 \times 4) + (5 \times 0) \\ (4 \times 2) + (-5 \times 4) + (7 \times 0) \\ (8 \times 2) + (-5 \times 4) + (-1 \times 0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 20 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{20} \\ -\frac{12}{20} \\ -\frac{4}{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $a = 1$, $b = -\frac{3}{5}$ และ $c = -\frac{1}{5}$

การแก้ระบบสมการ เชิงเส้นโดยใช้เมท ริกซ์ผกผัน

1. นำค่าสัมประสิทธิ์และค่าคงที่ในระบบสมการมาสร้างเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. หาค่าของ adj(A) จะได้ว่า

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ = \{(-1) \times (-2)\} - \{(1 \times 1)\} = 2 - 1 \\ = 1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ = -\{2 \times (-2)\} - \{(0 \times 1)\} = -(-4) \\ = 4$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = \{(2 \times 1) - \{(0 \times (-1))\}\} \\ = 2$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ = -\{[0 \times (-2)] - \{1 \times (-3)\}\} = -(0 + 3) \\ = -3$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ = \{1 \times (-2)\} - \{0 \times (-3)\} \\ = -2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = \{(1 \times 1) - (0 \times 0)\} \\ = 1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ = -3$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = -7$$

$$C_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ = -1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -7 \\ -3 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 4 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. หาค่าของ det A โดยใช้วิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ (ในที่นี้เลือกแถวที่ 1) จะได้ว่า

$$\det A = \sum_{j=1}^3 a_{1j} C_{1j} \\ = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} \\ = 1(1) + 0(4) + (-3)(2) \\ = 1 + 0 - 6 = -5$$

ตัวอย่างที่ 7.7 จงแก้ระบบสมการ

$$x - 3z = 2$$

$$2x - y + z = 4$$

$$y - 2z = 1$$

วิธีทำ จากโจทย์จะแสดงวิธีการแก้สมการตามขั้นตอนต่อไปนี้

4. หาค่าของ A^{-1} ($\det A \neq 0$) จาก $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A)$ จะได้ว่า

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 4 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

5. หาค่าของเมทริกซ์ X จาก $X = A^{-1}B$ จะได้ว่า

$$X = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 4 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} (1 \times 2) + (-3 \times 4) + (-3 \times 1) \\ (4 \times 2) + (-2 \times 4) + (-7 \times 1) \\ (2 \times 2) + (-1 \times 4) + (-1 \times 1) \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 - 12 - 3 \\ 8 - 8 - 7 \\ 4 - 4 - 1 \end{bmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -13 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{13}{5}, y = \frac{7}{5} \text{ และ } z = \frac{1}{5}$$

ถ้าต้องการทราบว่ามีระบบสมการ
ลูกหรือไม่ สามารถตรวจสอบ
ได้โดยการนำค่า x, y และ z แทน
ลงในสมการที่กำหนดดูสมการต้อง
เป็นจริง

การแก้ระบบสมการ เชิงเส้นโดยใช้กฎของ คราเมอร์

ทฤษฎีบท 7.2

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด (มิติ) $n \times n$ โดยที่ $\det(A) \neq 0$ แล้วระบบสมการที่เขียนในรูปสมการเมทริกซ์ $A \cdot X = B$ เมื่อตัวไม่ทราบค่า คือ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ และ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ เป็นค่าคงตัว โดย

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

แล้วระบบสมการนี้จะมีผลเฉลย คือ

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}, \dots, x_j = \frac{\det A_n}{\det j}, \dots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

เมื่อ A_j คือ เมทริกซ์ที่เกิดจากการแทนหลักที่ j ของเมทริกซ์ A ด้วยหลักของเมทริกซ์ B เช่น กำหนดระบบสมการ คือ

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

$$x_2 - 4x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 5$$

จะได้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}; x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}; x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}; x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

หาค่ากำหนดของ A, A_1, A_2, A_3 จะได้ว่า

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = [(1) + (-4) + 0] - (-3 + 4 + 0)$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = [0 + (-20) + 0] - (-15 + 0 + 0)$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = [0 - (-20)]$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = [5 - 0]$$

$$= 5$$

หาค่าเฉลยโดยกฎของคราเมอร์

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \text{ หรือ } 3\frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{5}{6}$$

$$x_1 = -\frac{5}{6}$$

$$x_2 = 3\frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{5}{6}$$

ตัวอย่างที่ 7.9 จงแก้ระบบสมการ

$$2x_1 - 2x_2 = 8$$

$$3x_1 + 3x_2 = 12$$

วิธีทำ จากโจทย์ จะแสดงวิธีการแก้สมการโดยกฎของคราเมอร์ขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างเมทริกซ์ตามกฎของคราเมอร์ โดย $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$ และ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

2. หาค่าตัวกำหนดของ A , A_1 และ A_2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (2 \times 3) - \{3 \times (-2)\} = 6 - (-6) \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det A_1 &= \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (8 \times 3) - \{12 \times (-2)\} = 24 - (-24) \\ &= 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det A_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} \\ &= (2 \times 12) - (3 \times 8) = 24 - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. หาผลเฉลยโดยกฎของคราเมอร์ จะได้ว่า

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$$

$$= \frac{48}{12}$$

$$= 4$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$$

$$= \frac{0}{12}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $x_1 = 4$ และ $x_2 = 0$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้กฎของคราเมอร์

ตัวอย่างที่ 7.10 จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned}x - 3z &= 2 \\ 2x - y + z &= 4 \\ y - 2z &= 1\end{aligned}$$

วิธีทำ จากโจทย์ จะแสดงวิธีการแก้สมการโดยกฎของคราเมอร์ ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างเมทริกซ์โดยกฎของคราเมอร์ โดย $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. หาค่าตัวกำหนดของ A , A_1 , A_2 และ A_3 โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์ (ในที่นี้เลือกหลักที่ 1) จะได้ว่า $\det A = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0$$

$$= \{(-1)(-2) - 1(1)\} + 2(-1)\{0(-2) - 1(-3)\}$$

$$= (2 - 1) + (-2 \times 3) = 1 - 6 = -5$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times \{(-1)(-2) - (1)(1)\} + (-4)\{0(-2) - 1(-3)\} + \{(0 \times 1) - (-1)(-3)\}$$

$$= 2(2 - 1) + (-4)(3) + (0 - 3)$$

$$= 2 - 12 - 3 = -13$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0$$

$$= \{4(-2) - 1\} + (-2)\{2(-2) - 1(-3)\}$$

$$= -9 + (-2)(-4 + 3) = -9 + 2 = -7$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= \{(-1)(1) - 1(4)\} + (-2)\{0(1) - 1(2)\}$$

$$= -5 + (-2)(-2) = -5 + 4 = -1$$

2. หาค่าเฉลยโดยกฎของคราเมอร์จะได้ว่า

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}$$

$$= \frac{-13}{-5}$$

$$= \frac{13}{5}$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A}$$

$$= \frac{-7}{-5}$$

$$= \frac{7}{5}$$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์

$$z = \frac{\det A_3}{\det A}$$

$$= \frac{-1}{-5}$$

$$= \frac{1}{5}$$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{13}{5}, y = \frac{7}{5} \text{ และ } z = \frac{1}{5}$$