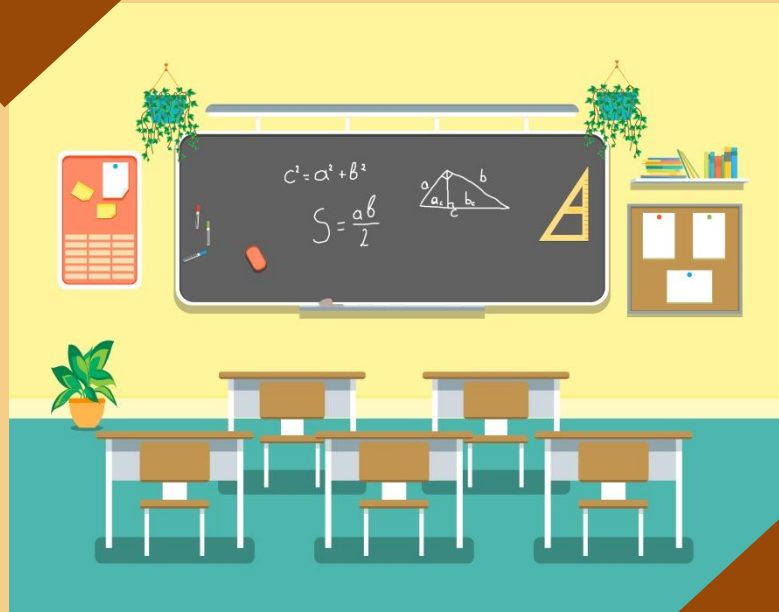




บทที่ 5

ตรรกศาสตร์



สาระการเรียนรู้

1. ประพจน์และการเชื่อมประพจน์
2. การหาค่าความจริงของประพจน์
3. ตารางค่าความจริง

ตรรกศาสตร์ เป็นวิธีการคิดที่ใช้หลักความเป็นเหตุเป็นผล
มาสรุปเป็นทฤษฎีหรือกฎเกณฑ์ การศึกษาทางคณิตศาสตร์ถือว่า
ตรรกศาสตร์มีความสำคัญอย่างยิ่ง เพราะกระบวนการวิเคราะห์
การใช้เหตุผล เป็นเครื่องมือที่จำเป็นในการแสวงหาความรู้ที่ใช้ใน
การพัฒนาคณิตศาสตร์ ดังนั้น เพื่อเป็นการให้เหตุผลที่ถูกต้อง
สมเหตุสมผล จึงกล่าวได้ว่าตรรกศาสตร์เป็นวิชาที่ช่วยให้บุคคล
สามารถนำหลักการมาใช้ประกอบการตัดสินใจเพื่อจะนำไปสู่
ข้อยุติที่ถูกต้องได้

1 ประพจน์และ การเชื่อมประพจน์

1. ประพจน์

ประพจน์ (Proposition หรือ Statement) คือ ประโยคหรือข้อความที่อยู่ในรูปประโยคบอกเล่า หรือประโยคปฏิเสธ ที่สามารถบอกได้ว่ามีค่าความจริง เป็นจริงหรือเป็นเท็จเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

การเขียนประพจน์โดยทั่วไปนิยมเขียนแทนด้วยอักษรภาษาอังกฤษ $p, q, r, \dots$ ประพจน์จะต้องเป็นจริง (True) หรือเท็จ (False) เพียงอย่างเดียวเท่านั้น ซึ่งเราเรียกว่า **ค่าความจริง (Truth Value)** ของประพจน์ โดยที่

- ค่าความจริงเป็น**จริง** แทนด้วย **T (True)**

- ค่าความจริงเป็น**เท็จ** แทนด้วย **F (False)**



ตัวอย่าง

พิจารณาคำความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

- 1) ตากเป็นจังหวัดทางภาคเหนือของประเทศไทย
- 2) สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษาสังกัดกระทรวงศึกษาธิการ
- 3) ประเทศไทยมี 75 จังหวัด
- 4) $7 + 2 = 10$

สรุป

จากข้อ 1), 2) มีค่าความจริง เป็น จริง
และ 3), 4) มีค่าความจริง เป็น เท็จ



ข้อสังเกต

**ประโยชน์หรือข้อความเป็นคำถาม คำสั่ง ห้ามปราม ขอร้อง
อ้อนวอน อุดหนุน สุภาวดี คำพิงเพย แสดงความปรารถนา หรือประโยชน์
ที่ไม่ทราบค่าความจริงแน่นอน ถือว่าไม่เป็นประพจน์** ตัวอย่างเช่น

- วันนี้นักศึกษาทำการบ้านหรือเปล่า (คำถาม)
- ทุกคนเปิดหนังสือ (คำสั่ง)
- อย่าไปเล่นน้ำเวลาฝนตก (ห้ามปราม)
- ใจปลาซิว (สำนวน)
- ทิ้งขยะในมือ “ลงถัง” เถอะครับ (ขอร้อง)



ตัวอย่างที่ 1

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์ หรือไม่เป็นประพจน์

		เป็นประพจน์	ไม่เป็นประพจน์
1.	$\sqrt{4}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ	✓	
2.	$x + 2 = 7$		✓
3.	เลี้ยงช้างผ่านตลอด		✓
4.	$x^2 + y^2 = 1$		✓
5.	นางสาวยิ่งลักษณ์ ชินวัตรเป็นอดีตนายกรัฐมนตรี	✓	



ตัวอย่างที่ 2

จงพิจารณาคำความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

		ค่าความจริง
1.	π มีค่าประมาณ $\frac{22}{7}$	จริง
2.	$5 + 3 < \sqrt[3]{64}$	เท็จ
3.	เขื่อนภูมิพลอยู่จังหวัดตาก	จริง
4.	0 เป็นจำนวนนับ	เท็จ
5.	$3 + 5 = 4$	จริง

2. การเชื่อมประพจน์

1

1) การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “และ” (Conjunction) เราใช้สัญลักษณ์ “ $\wedge$ ” เขียนแทนสัญลักษณ์ p และ q ด้วย $p \wedge q$

p แทน นิตยาจะไปดูภาพยนตร์

q แทน อารยาจะไปดูภาพยนตร์

ถ้าเชื่อมประพจน์ p กับประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “และ” ก็จะได้ประพจน์ใหม่ คือ $p \wedge q$ แทน นิตยาและอารยาจะไปดูภาพยนตร์

2

2) การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “หรือ” (Disjunction) เราใช้สัญลักษณ์ “ $\vee$ ” เขียนแทนสัญลักษณ์ p หรือ q ด้วย $p \vee q$

คำว่า “หรือ” โดยทั่วไปมีความหมายดังนี้

ประการแรก หมายถึง “อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น” เช่น

นายสมศักดิ์นั่งหรือเดิน เราทราบว่า นายสมศักดิ์ไม่สามารถนั่งหรือเดินพร้อมกันได้

ประการที่สอง หมายถึง “อย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่าง” เช่น

วรรณใส่เสื้อสีแดง หรือกระโปรงสีเขียว อาจหมายถึงกรณีใดกรณีหนึ่งในสามกรณี

ข้างล่างนี้

วรรณใส่เสื้อสีแดงอย่างเดียว

วรรณใส่กระโปรงสีเขียวอย่างเดียว

วรรณใส่เสื้อสีแดง และใส่กระโปรงสีเขียว

ในวิชาตรรกศาสตร์ เราใช้ **หรือ** ตามความหมาย**ประการที่สอง**เท่านั้น



2. การเชื่อมประพจน์

3

3) การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” (Conditional) เราใช้สัญลักษณ์ “ $\rightarrow$ ”
เขียนแทนสัญลักษณ์ ถ้า p แล้ว q ด้วย $p \rightarrow q$

เช่น p แทน ฝนตกได้เกรดเฉลี่ย 3.00 ขึ้นไป

q แทน คุณแม่ให้รางวัล

ถ้าเชื่อมประพจน์ p กับประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” ก็จะได้ประพจน์ใหม่ คือ
 $p \rightarrow q$ แทน ฝนตกได้เกรดเฉลี่ย 3.00 ขึ้นไป แล้วคุณแม่จะให้รางวัล

4

4) การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “...ก็ต่อเมื่อ...” (Biconditional) เราใช้สัญลักษณ์ “ $\leftrightarrow$ ”
เขียนแทนสัญลักษณ์ p ก็ต่อเมื่อ q ด้วย $p \leftrightarrow q$

เช่น p แทน ครูหักคะแนน

q แทน นักเรียนมาสาย

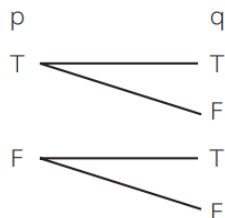
ถ้าเชื่อมประพจน์ p กับประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “...ก็ต่อเมื่อ...” ก็จะได้ประพจน์ใหม่ คือ
 $p \leftrightarrow q$ แทน ครูหักคะแนน ก็ต่อเมื่อ นักเรียนมาสาย

2 การหาค่าความจริง ของประพจน์

ในทางตรรกศาสตร์ใช้สัญลักษณ์ $p, q, r, \dots$ แทนประพจน์ย่อย

1) ถ้าประพจน์ย่อยมี 1 ประพจน์ คือ p เช่น p แทนแพรวาเป็นผู้หญิงหน้าตาดี
ค่าความจริงที่เป็นไปได้มี 2 กรณี คือ จริง หรือ เท็จ

2) ถ้าประพจน์ย่อยมี 2 ประพจน์ คือ p และ q ค่าความจริงที่เป็นไปได้มี 4 กรณี
พิจารณาโดยใช้แผนภูมิต้นไม้ (Tree Diagram) ดังนี้

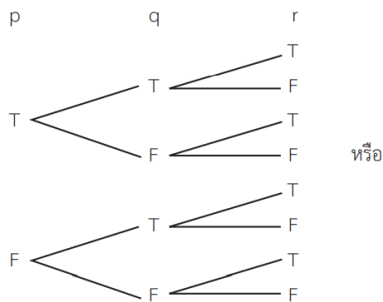


หรือ

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

2 การหาค่าความจริง ของประพจน์

3) ถ้าประพจน์ย่อยมี 3 ประพจน์ คือ p , q และ r ค่าความจริงที่เป็นไปได้มี 8 กรณี พิจารณาโดยใช้แผนภูมิต้นไม้ (Tree Diagram) ดังนี้



p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

4) ถ้าประพจน์ย่อยมี n ประพจน์ ค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมด 2^n กรณี เช่น ถ้าประพจน์ย่อยมี 1 ประพจน์ ค่าความจริงที่เป็นไปได้มี $2^1 = 2$ กรณี

3 ตารางค่าความจริง

1. ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมเพียงตัวเดียว

1

1) ตารางค่าความจริงของ $p \wedge q$ คือ

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2

2) ตารางค่าความจริงของ $p \vee q$ คือ

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

3 ตารางค่าความจริง

1. ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมเพียงตัวเดียว

3

3) ตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ คือ

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

4

4) ตารางค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ คือ

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ข้อสังเกต

ข้อสังเกต

- 1) ประพจน์ $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นจริงเพียงกรณีเดียว เมื่อค่าความจริงของ p และ q เป็นจริงทั้งคู่
- 2) ประพจน์ $p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จเพียงกรณีเดียว เมื่อค่าความจริงของ p และ q เป็นเท็จทั้งคู่
- 3) ประพจน์ $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จเพียงกรณีเดียว เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ
- 4) ประพจน์ $p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน และมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงต่างกัน

นิเสธของประพจน์

ถ้า p เป็นประพจน์ นิเสธของประพจน์ p คือประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับ p นิเสธของ p เขียนด้วย $\sim p$ ตารางค่าความจริง $\sim p$ คือ



p	$\sim p$
T	F
F	T



2. ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป

ในการหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป มีลำดับขั้นตอนดังนี้

- 1) หาค่าความจริงของประพจน์ที่อยู่ในวงเล็บก่อน
- 2) ถ้าไม่ใส่วงเล็บให้หาค่าความจริงของนิเสธ ($\sim$) ก่อน แล้วตามด้วยตัวเชื่อม $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ และ $\leftrightarrow$ ตามลำดับ แบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ



2. ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป

กรณีที่ 1 กรณีที่โจทย์กำหนดให้ค่าความจริงของประพจน์ย่อยใด ๆ หรือบางประพจน์มาให้ ให้ใส่ค่าความจริงตรงกับประพจน์แต่ละประพจน์ที่โจทย์กำหนดให้ จากนั้นก็หาค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากตัวเชื่อม โดยการเชื่อมประพจน์จากค่าความจริงที่ศึกษามาแล้วข้างต้น



กรณีที่ 2 กรณีที่โจทย์ไม่ได้บอกค่าความจริงของประพจน์ย่อยใด ๆ มาให้ การหาค่าความจริงในลักษณะเช่นนี้ ต้องพิจารณาจากค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมดทุกกรณี โดยการสร้างตารางค่าความจริง ดังนั้น ถ้าประพจน์ย่อยมี n ประพจน์ ค่าความจริงที่เป็นไปได้ จะมีทั้งหมด 2^n กรณี

สรุป

ประพจน์ หมายถึง ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว

การเชื่อมประพจน์จะเชื่อมด้วยตัวเชื่อม ได้แก่ **“และ”**, **“หรือ”**, **“ถ้า...แล้ว”**, **“...ก็ต่อเมื่อ...”** และ **“ไม่”** เพื่อความสะดวกเราใช้อักษร $p, q, r, \dots$ แทนประพจน์ โดยที่ค่าความจริงเป็น**จริง** แทนด้วย **T (True)** และ ค่าความจริงเป็น**เท็จ** แทนด้วย **F (False)**