บทที่ 7

การอ้างอิงเหตุผล และตัวบ่งปริมาณ

สาระการเรียนรู้

1. การอ้างเหตุผล
2. ประโยคเปิด
3. ตัวบ่งปริมาณ
4. ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณตัวแปรเดียว

1 การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล (Argument) หมายถึง การอ้างว่าถ้ามีเหตุ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ แล้วสามารถสรุปผล c ได้

การอ้างเหตุผลประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วน คือ

1) สมมติฐาน (Hypotheses) คือ ส่วนที่เป็น “เหตุ” หรือ สิ่งที่กำหนดให้แทนด้วยประพจน์ย่อย $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$

2) ผลสรุป (Conclusion) คือ ข้อสรุปจากสมมติฐานหรือเหตุ หรือส่วนที่เป็น “ผล” แทนด้วย c

1 การอ้างเหตุผล

การตรวจสอบการอ้างเหตุผลมีดังนี้

1) ถ้ารูปแบบของประพจน์ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \dots \wedge p_n) \rightarrow c$ เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว **การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล (Valid)**

2) ถ้ารูปแบบของประพจน์ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \dots \wedge p_n) \rightarrow c$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว **การอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)**

1 การอ้างเหตุผล

จากการอ้างเหตุผลที่จัดให้อยู่ในรูปแบบของประพจน์ ถ้า...แล้ว... คือ เหตุ $\rightarrow$ ผล จากนั้นทำการตรวจสอบดูว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ สามารถทำได้ดังนี้

1) โดยการสร้างตารางค่าความจริง
2) โดยการวิเคราะห์ค่าความจริง

ตัวอย่าง

จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1) ถ้านักศึกษาตั้งใจเรียนแล้วนักศึกษาสอบผ่าน

2) นักศึกษาตั้งใจเรียน

ผล นักศึกษาสอบผ่าน

วิธีทำ ให้ p แทนนักศึกษาตั้งใจเรียน, q แทนนักศึกษาสอบผ่าน

จะได้รูปแบบของประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

สร้างตารางแสดงค่าความจริงรูปแบบของประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

จากตารางแสดงค่าความจริงรูปแบบของประพจน์เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้จึงสมเหตุสมผล (Valid)

รูปแบบการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลที่ควรทราบ มีดังนี้

รูปแบบที่ 1		รูปแบบที่ 2	
เหตุ	1) $p \rightarrow q$	เหตุ	1) $p \rightarrow q$
	2) p		2) $\sim q$
ผล	q	ผล	$\sim p$

รูปแบบการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลที่ควรทราบ มีดังนี้

รูปแบบที่ 3	รูปแบบที่ 4
เหตุ 1) $p \rightarrow q$ 2) $q \rightarrow r$ ผล $p \rightarrow r$	เหตุ 1) $p \vee q$ 2) $\sim p$ ผล q
รูปแบบที่ 5	**รูปแบบที่ 6**
เหตุ $p \wedge q$ ผล p (หรือ q)	เหตุ p ผล $p \vee q$

รูปแบบการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลที่ควรทราบ มีดังนี้

รูปแบบที่ 7	รูปแบบที่ 8
เหตุ $p \rightarrow q$	เหตุ 1) $p \rightarrow r$
ผล $\sim q \rightarrow \sim p$	2) $q \rightarrow s$
(หรือ $p \vee q$)	3) $p \vee q$
	ผล $r \vee s$

2 ประโยคเปิด

ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธ ที่ประกอบด้วยตัวแปรทำให้ไม่เป็นประพจน์ และเมื่อแทนที่ตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วจะได้ประพจน์

$x + 3 > 7$; ประโยคเปิดที่มีตัวแปร “x”

$x - y = 10$; ประโยคเปิดที่มีตัวแปร “x และ y”

เขาเป็นนักฟุตบอลทีมชาติไทย ; ประโยคเปิดที่มีตัวแปร “เขา”

เธอเป็นนักศึกษาระดับ ปวส. ; ประโยคเปิดที่มีตัวแปร “เธอ”

ประโยคข้างต้นไม่เป็นประพจน์ เพราะเราไม่ทราบค่าของตัวแปรในแต่ละประโยคนั้นคืออะไร และไม่สามารถหาค่าความจริงได้

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนประโยคเปิด

$P(x), Q(x)$	แทน	ประโยคเปิดที่มีตัวแปรเป็น x
$P(x, y), Q(x,y)$	แทน	ประโยคเปิดที่มีตัวแปรเป็น x, y
เช่น $P(x)$	แทน	$x + 3 > 7$
$P(x, y)$	แทน	$x - y = 10$

ตัวอย่าง

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์หรือเป็นประโยคเปิด ถ้าเป็นประโยคเปิด ตัวแปรคืออะไร หรือไม่เป็นทั้งประพจน์และประโยคเปิด

ข้อความ	ประพจน์	ประโยคเปิด	ไม่เป็นทั้งสองอย่าง	ตัวแปร
1) เขาเป็นนักศึกษาระดับ ปวส. 1		✓		เขา
2) $3 + 5 = 8$	✓			
3) $x + 7 = 3$		✓		x
4) จงแก้สมการ $x^2 - 4x + 3 = 0$			✓	

การทำประโยคเปิดให้เป็นประพจน์

1) นำสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ แทนที่ตัวแปรในประโยคเปิด

เมื่อแทนค่าตัวแปรในประโยคเปิด จะทำให้ทราบค่าความจริงของประโยคนั้นได้ เช่น ประโยคเปิด $x + 3 > 4$ และ $U = \{0, 1, 2\}$

ถ้าแทน x ด้วย 0 จะได้ $0 + 3 > 4$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ถ้าแทน x ด้วย 1 จะได้ $1 + 3 > 4$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ถ้าแทน x ด้วย 2 จะได้ $2 + 3 > 4$ มีค่าความจริงเป็นจริง

การทำประโยคเปิดให้เป็นประพจน์

2) เติมตัวบ่งปริมาณให้ครบทุกตัวแปร เช่น ทุก ๆ ค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง $x^2 - 1 \geq 0$

ดังนั้น ประโยคเปิดสามารถทำให้เป็นประพจน์ได้ต้องประกอบด้วย ประโยคเปิด เอกภพสัมพัทธ์ และตัวบ่งปริมาณ

3 ตัวบ่งปริมาณ

❶ **ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (Universal Quantifier)** ได้แก่ ตัวบ่งปริมาณที่มีความหมายเดียวกับ “สำหรับ...ทุกตัว” หรือ “ทุกๆ” เป็นต้น ซึ่งหมายถึง ต้องใช้ทุกสิ่งทุกอย่างในเอกภพสัมพัทธ์ (U) และใช้สัญลักษณ์ $\forall$ (อ่านว่า for all) แทนตัวบ่งปริมาณทั้งหมด

เราใช้สัญลักษณ์ $\forall x$ แทน สำหรับทุกๆ x หรือสำหรับแต่ละ x

และถ้าให้ P(x) แทนประโยคเปิด เขียนแทนด้วย $\forall x[P(x)]$ แทน สำหรับ x ทุกตัวใน P(x)

ตัวอย่างเช่น สำหรับ x ทุกตัว ซึ่ง $x + 0 = x$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง

เขียนแทนด้วย $\forall x[x + 0 = x]$, $U = R$ ถ้าให้ P(x) แทน $x + 0 = x$

จะได้ $\forall x[P(x)]$, $U = R$

3 ตัวบ่งปริมาณ

❷ **ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง (Existential Quantifier)** ได้แก่ ตัวบ่งปริมาณที่มีความหมายเดียวกับ “สำหรับบาง...ตัว” หรือ “บาง” หรือ “มีอย่างน้อยหนึ่ง” ซึ่งหมายถึง อย่างน้อยหนึ่งสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ และใช้สัญลักษณ์ $\exists$ (อ่านว่า for some) แทนตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง

เราใช้สัญลักษณ์ $\exists x$ แทน สำหรับ x บางตัว

และถ้าให้ P(x) แทนประโยคเปิด เขียนแทนด้วย $\exists x[P(x)]$ แทน สำหรับ x บางตัวใน P(x)

ตัวอย่างเช่น สำหรับ x ทุกตัว ซึ่ง $x + 2 = 0$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเต็ม

เขียนแทนด้วย $\exists x[x + 2 = 0]$, $U = I$ ถ้าให้ P(x) แทน $x + 2 = 0$

จะได้ $\exists x[P(x)]$, $U = I$

4 ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณตัวแปรเดียว

1 ค่าความจริงของประพจน์ $\forall x[P(x)]$

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ทุกตัวใน U แล้วทำให้ P(x) เป็นจริง

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x อย่างน้อย 1 ตัวใน U แล้วทำให้ P(x) เป็นเท็จ

4 ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณตัวแปรเดียว

❷ **ค่าความจริงของประพจน์ $\exists x[P(x)]$**

$\exists x[P(x)]$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง

ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x อย่างน้อย 1 ตัวใน U แล้วทำให้ P(x) เป็นจริง

$\exists x[P(x)]$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ

ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ทุกตัวใน U แล้วทำให้ P(x) เป็นเท็จทั้งหมด

(ไม่มีสมาชิกใน U แม้ตัวเดียวไปแทนค่า x ใน P(x) แล้วทำให้ P(x) เป็นจริง)

สรุป

การอ้างเหตุผล คือ การพิจารณาว่า ถ้ามีเหตุ $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots \wedge P_n$ แล้วผล c ที่เกิดขึ้นนั้นอย่างสมเหตุสมผลหรือไม่ ซึ่งสามารถกระทำได้โดยใช้การตรวจสอบว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร

ตัวบ่งปริมาณ แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด และตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่งค่าความจริงของประพจน์

$\forall x[P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อนำ x ทุกค่าใน U แทนใน P(x) แล้ว P(x) เป็นจริง

$\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อนำ x อย่างน้อย 1 ค่า ใน U แทนใน P(x) แล้ว P(x) เป็นเท็จ

$\exists x[P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อนำ x อย่างน้อย 1 ค่า ใน U แทนใน P(x) แล้ว P(x) เป็นจริง

$\exists x[P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อนำ x ทุกค่าใน U แทนใน P(x) แล้ว P(x) เป็นเท็จทั้งหมด