



บทที่ 8

อสมการ

เชิงเส้น



สาระการเรียนรู้

1. อสมการ
2. กราฟของ
อสมการเชิงเส้น
3. กราฟของระบบ
อสมการเชิงเส้น

1 อสมการ

อสมการ คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยมีสัญลักษณ์ น้อยกว่า ($<$), มากกว่า ($>$), น้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$), มากกว่าหรือเท่ากับ ($\geq$) และไม่เท่ากับ ($\neq$) บอกความสัมพันธ์ของจำนวน เช่น

$$8 > 4$$

$$12 < 18$$

$$3x + 2 \geq 10$$

$$x \neq 5$$

1 อสมการ

อสมการที่มีตัวแปรเดียวและกำลัง
ตัวแปรเป็นหนึ่ง เรียกว่า **อสมการ**
เชิงเส้นตัวแปรเดียว เช่น

$$x \geq 0$$

$$y < 1$$

$$5x + 3 \leq 10$$



อสมการที่มีสองตัวแปรและกำลัง
ตัวแปรเป็นหนึ่ง เรียกว่า **อสมการ**
เชิงเส้นสองตัวแปร เช่น

$$x + y \geq 10$$

$$y < 2x + 5$$

2 กราฟของ อสมการเชิงเส้น

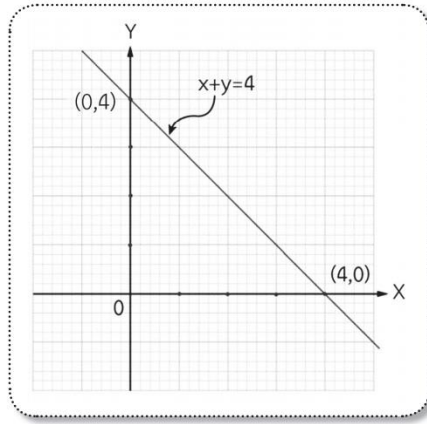
กราฟของอสมการเชิงเส้น คือ กราฟของคู่อันดับหรือความสัมพันธ์ที่เขียนกราฟบนระนาบหรือระบบแกนมุมฉาก

การเขียนกราฟของอสมการเชิงเส้นทำได้โดยการเปลี่ยนเครื่องหมายจากอสมการเป็นเครื่องหมายสมการ **พิจารณากราฟของสมการ $x + y = 4$** ในการเขียนกราฟ

สมการเส้นตรงทำได้โดยหาจุดตัดแกน x คือ $(x, 0)$ และจุดตัดแกน y คือ $(0, y)$ นั่นคือ

x	0	4
y	4	0

จะได้กราฟสมการ $x + y = 4$ ดังนี้



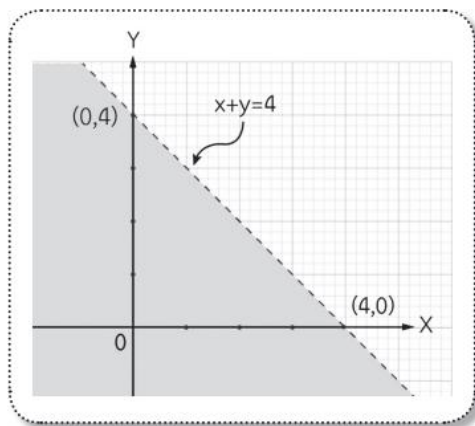
จากกราฟสมการ $x + y = 4$ คือ จุดทุกจุดบนเส้นตรง $x + y = 4$ จะเห็นว่าเส้นตรงดังกล่าวแบ่งระนาบออกเป็น 2 ส่วน คือ

ส่วนที่หนึ่ง คือ ส่วนที่จุดทุกจุดสอดคล้องกับอสมการ $x + y > 4$ (บริเวณเหนือเส้นกราฟ)

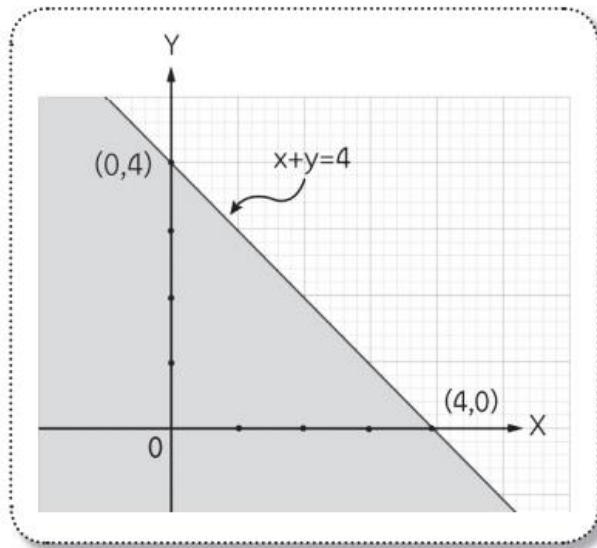
ส่วนที่สอง คือ ส่วนที่จุดทุกจุดสอดคล้องกับอสมการ $x + y < 4$ (บริเวณใต้เส้นกราฟ)

ในการพิจารณาว่าบริเวณใดสอดคล้องกับอสมการที่กำหนด ทำได้โดยการนำจุดของแต่ละส่วนไปแทนที่ค่าในอสมการ เพื่อตรวจว่าทำให้อสมการนั้นเป็นจริงหรือไม่ ดังนี้

- แทนค่า $(0, 0)$ ซึ่งอยู่ใต้เส้นกราฟ $x + y = 4$ จะได้ $0 + 0 = 0$ ซึ่งน้อยกว่า 4 ทำให้กราฟ $x + y < 4$ และ $x + y \leq 4$ อยู่ใต้เส้นกราฟ $x + y = 4$ (คืออาณาบริเวณอยู่ด้านเดียวกับจุด $(0, 0)$ ซึ่งแสดงบริเวณแรเงา)

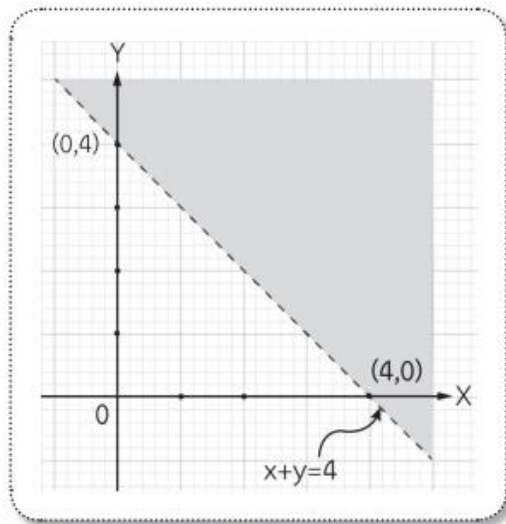


กราฟของ $x + y < 4$ คือ อาณาบริเวณแรเงาใต้เส้นกราฟ $x + y = 4$ โดยไม่รวมเส้นกราฟ $x + y = 4$
(ตั้งเส้นประของภาพ)

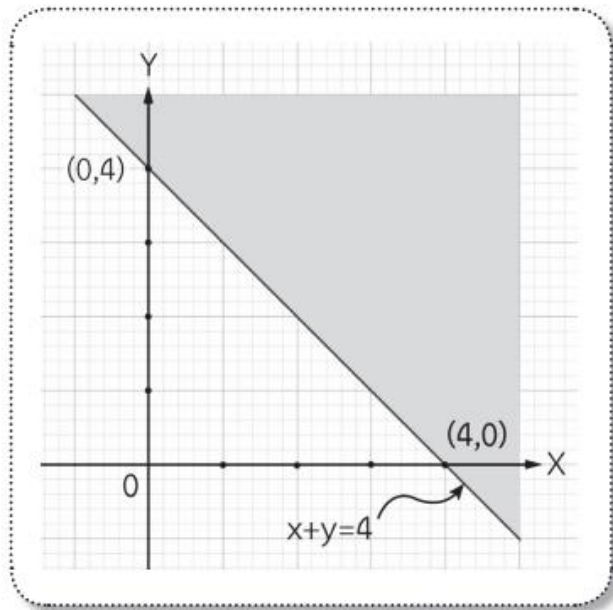


กราฟของ $x + y \leq 4$ คือ อาณาบริเวณแรเงาใต้เส้นกราฟ $x + y = 4$ โดยรวมเส้นกราฟ $x + y = 4$ (ดังเส้นทึบของกราฟ)

- แทนค่า $(4, 4)$ ซึ่งอยู่เหนือเส้นกราฟ $x + y = 4$ จะได้ $4 + 4 = 8$ ซึ่งมากกว่า 4 ทำให้กราฟ $x + y > 4$ และ $x + y \geq 4$ อยู่เหนือเส้นกราฟ $x + y = 4$



กราฟของ $x + y > 4$ คือ อาณาบริเวณแรเงาเหนือเส้นกราฟ $x + y = 4$ โดยไม่รวมเส้นกราฟ $x + y = 4$ (ดังเส้นประของกราฟ)



กราฟของ $x + y \geq 4$ คือ อาณาบริเวณแรเงาเหนือเส้นกราฟ $x + y = 4$ โดยรวมเส้นกราฟ $x + y = 4$ (ดังเส้นทึบของกราฟ)



ข้อสังเกต

ข้อสังเกต

- 1) ถ้ากราฟเส้นตรงไม่ผ่านจุด $(0, 0)$ อาจใช้จุด $(0, 0)$ เป็นจุดที่ใช้ในการพิจารณาว่า บริเวณส่วนนั้น สอดคล้องกับอสมการหรือไม่
- 2) กรณีจุด (x, y) ที่นำไปแทนค่าในอสมการแล้วไม่สอดคล้องกับอสมการดังกล่าวแสดงว่าอาณาบริเวณที่สอดคล้องกับอสมการคืออาณาบริเวณที่อยู่ตรงข้ามกับจุดนั้น

3 กราฟของระบบ อสมการเชิงเส้น

ระบบอสมการเชิงเส้น คือ อสมการเชิงเส้นหลายอสมการ ตั้งแต่สองอสมการขึ้นไป

กราฟของระบบอสมการเชิงเส้น คือ กราฟของอสมการเชิงเส้นหลายอสมการที่เขียนในระบบแกนพิกัดมุมฉากเดียวกัน

การเขียนกราฟของระบบอสมการเชิงเส้น มีขั้นตอนดังนี้

- 1) เขียนกราฟของสมการเชิงเส้นหรือสมการเส้นตรง (หาพิกัดของจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y)
- 2) หาอาณาบริเวณแรเงาที่สอดคล้องกับอสมการทุกอสมการ
- 3) หาจุดตัดของระบบอสมการเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 1

จงเขียนกราฟระบบอสมการต่อไปนี้

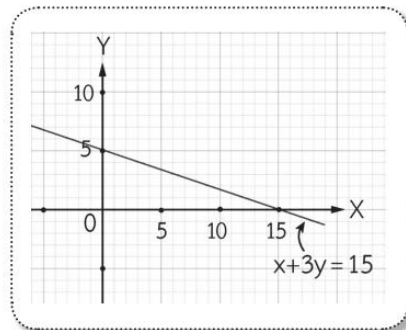
$$x + 3y \geq 15, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

วิธีทำ

เขียนกราฟสมการ $x + 3y = 15$

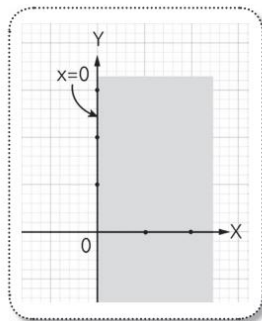
x	0	15
y	5	0

กราฟของ $x + 3y = 15$ ดังรูป

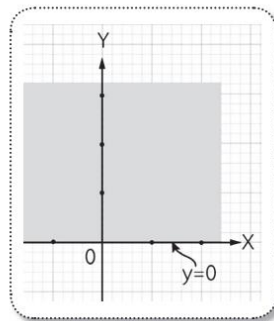


ตัวอย่างที่ 1

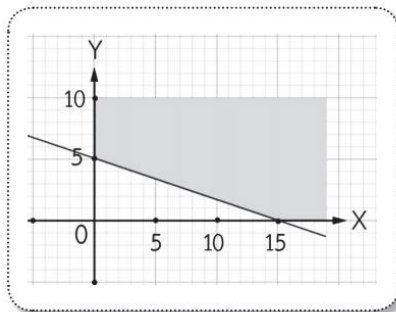
กราฟของ $x \geq 0$



กราฟของ $y \geq 0$



ดังนั้น กราฟของระบบสมการ $x + 3y \geq 15$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$





ตัวอย่างที่ 2

จงเขียนกราฟระบบสมการต่อไปนี้

$$x + y \leq 5, \quad 2x + y \geq 3, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

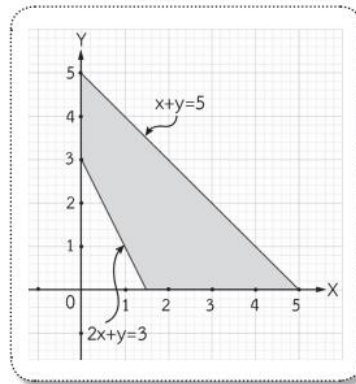
วิธีทำ

เขียนกราฟของสมการ $x + y = 5$ และ $2x + y = 3$

x	0	5
y	5	0

x	0	3/2
y	3	0

กราฟของระบบสมการ $x + y \leq 5, 2x + y \geq 3, x \geq 0$ และ $y \geq 0$ คือ





ตัวอย่างที่ 3

จงเขียนกราฟระบบอสมการต่อไปนี้

$$2x + 3y \leq 12, \quad 6x + 5y \leq 30, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

วิธีทำ

1) เขียนกราฟของสมการ $2x + 3y = 12$

x	0	6
y	4	0

2) เขียนกราฟของสมการ $6x + 5y = 30$

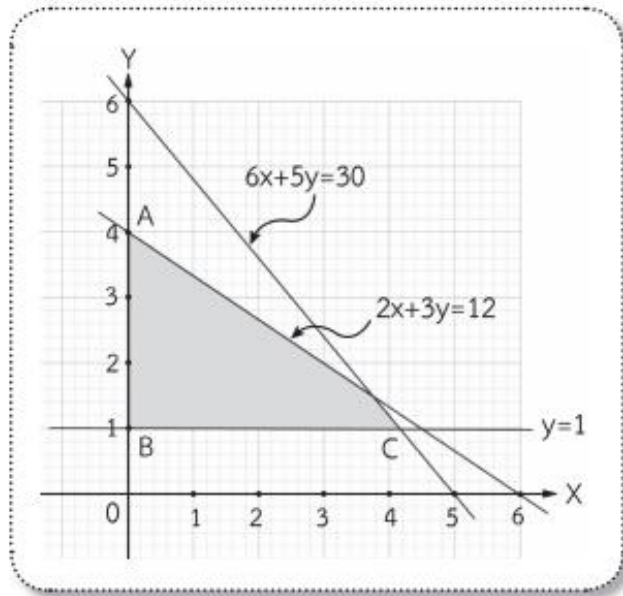
x	0	5
y	6	0

3) เขียนกราฟของสมการ $y = 1$

x	0	1
y	1	1

ตัวอย่างที่ 3

ดังนั้น กราฟที่สอดคล้องกับทุกสมการ คือ อาณาบริเวณที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยม ABC



สรุป

อสมการ คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยมีสัญลักษณ์ $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ และ $\neq$

อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เช่น $x \geq 5$, $x + 2 \leq 4$ เป็นต้น

อสมการเชิงเส้นสองตัวแปร เช่น $2x + y \leq 3$, $y \leq x + 1$ เป็นต้น

กราฟของอสมการเชิงเส้น คือ กราฟของคู่อันดับหรือกราฟของความสัมพันธ์ที่เขียนในระบบแกนมุมฉาก