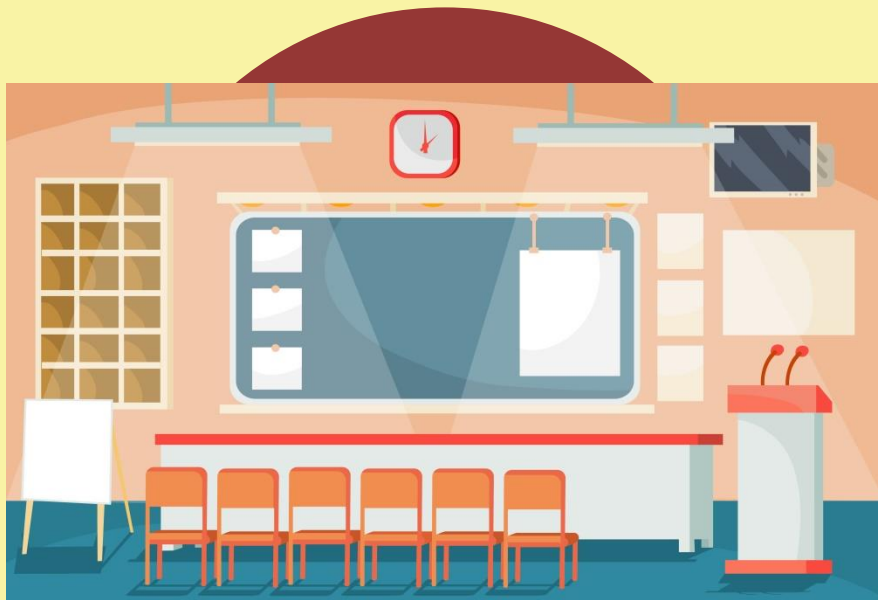




บทที่ 9

กำหนดการ เชิงเส้น



สาระการเรียนรู้

1. กำหนดการเชิงเส้น

กำหนดการเชิงเส้น

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)

เป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่นำมาประยุกต์ใช้ในทางธุรกิจ
สำหรับแก้ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด
เช่น เงินทุน เครื่องจักร จำนวนคน เวลา วัตถุดิบ เป็นต้น
ให้แก่กิจกรรมต่าง ๆ เพื่อให้เกิดประโยชน์มากที่สุด และมี
ประสิทธิภาพสูงสุด หรือก่อให้เกิดการสูญเสียน้อยที่สุด



การหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดภายใต้เงื่อนไขบังคับหรือข้อจำกัด

1) ฟังก์ชันเชิงเส้นหรือสมการเชิงเส้น เป็นฟังก์ชันที่เราต้องการนำไปหาค่าที่เหมาะสม เช่น ฟังก์ชันเกี่ยวกับกำไร ซึ่งเราต้องการให้มีค่ามากที่สุด โดยที่สร้างขึ้นจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด เรียกว่า ฟังก์ชันจุดประสงค์ (Objective Function) หรือสมการจุดประสงค์

2) ระบบสมการเชิงเส้น โดยสร้างจากเงื่อนไขบังคับหรือข้อจำกัด ที่มีอยู่ในปัญหาต่าง ๆ เหล่านั้น ซึ่งเรียกว่า **สมการข้อจำกัด**



การหาคำตอบของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีใช้กราฟ

- 1) สร้างฟังก์ชันจุดประสงค์และอสมการข้อจำกัด ตามเงื่อนไขข้อจำกัดที่โจทย์กำหนด
- 2) เขียนกราฟของระบบสมการจากอสมการข้อจำกัด บริเวณที่แรเงาซึ่งสอดคล้องกับอสมการข้อจำกัด เรียกว่า **รูปหลายเหลี่ยมของบริเวณที่หาคำตอบได้**
- 3) หาพิกัดจากจุดมุมของรูปหลายเหลี่ยมของบริเวณที่หาคำตอบได้
- 4) แทนค่าพิกัดของจุดมุมของรูปหลายเหลี่ยมในฟังก์ชันจุดประสงค์ **จุดมุม** เป็นไปตามเงื่อนไข นั่นคือคำตอบของโจทย์ปัญหา

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าสูงสุดของ $P = 15x + 50y$ ภายใต้ข้อสมการข้อจำกัดที่กำหนดให้

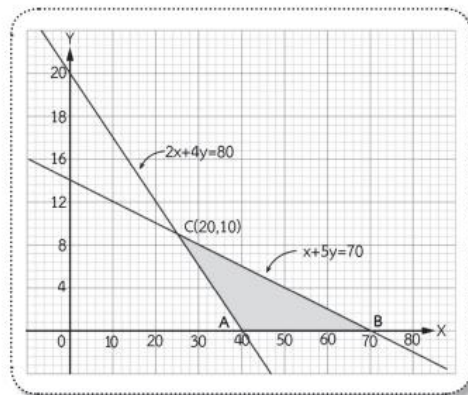
$$2x + 4y \geq 80, \quad x + 5y \leq 70, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

วิธีทำ

ฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 15x + 50y$

อสมการข้อจำกัด $2x + 4y \geq 80, \quad x + 5y \leq 70, \quad x \geq 0$ และ $y \geq 0$

เขียนกราฟของอสมการข้อจำกัดได้ดังรูป



ตัวอย่างที่ 1

ฟังก์ชันของจุดมุม ABC คือ (40, 0), (70, 0) และ (20, 10) แทนค่าฟังก์ชันของจุดมุมข้างต้นในฟังก์ชัน
จุดประสงค์ $P = 15x + 50y$ ได้ดังนี้

จุดมุม (x, y)	$P = 15x + 50y$
(70, 0)	1,050 = ค่าสูงสุด
(40, 0)	600
(20, 10)	800

ดังนั้น ค่า P มีค่าสูงสุด คือ 1,050 เมื่อ $x = 70$ และ $y = 0$

จากตัวอย่างที่ 1 หาจุดตัดโดยการแก้ระบบสมการ ดังนี้

$$2x + 4y = 80 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + 5y = 70 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(2) \times 2 ; 2x + 10y = 140 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(3) - (1) ; 6y = 60$$

$$y = 10$$

ตัวอย่างที่ 1

แทนค่า $y = 10$ ใน (1) ; $2x + 4(10) = 80$

$$2x + 40 = 80$$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

จุดตัดคือ $(20, 10)$

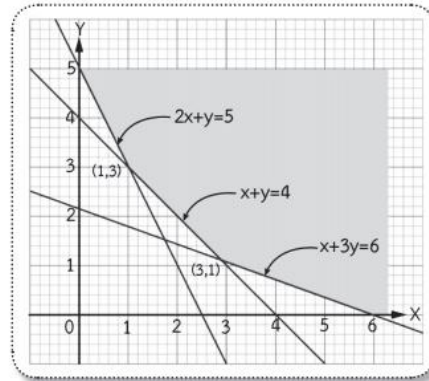
ตัวอย่างที่ 2

จงหาค่าต่ำสุดของ $C = 3x + 2y$ ภายใต้ข้อสมการข้อจำกัดที่กำหนดให้

$$2x + y \geq 5, \quad x + 3y \geq 6, \quad x + y \geq 4, \quad x \geq 0 \quad \text{และ} \quad y \geq 0$$

วิธีทำ

เขียนกราฟของสมการข้อจำกัดได้ดังรูป



พิกัดของจุดมุม (0, 5), (6, 0), (1, 3) และ (3, 1)

แทนค่าพิกัดของจุดมุมในฟังก์ชันจุดประสงค์ $C = 3x + 2y$ ได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2

จุดมุม (x, y)	$C = 3x + 2y$
(0, 5)	10
(6, 0)	18
(1, 3)	9 = ค่าต่ำสุด
(3, 1)	11

ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ $C = 3x + 2y$ คือ 9

จากตัวอย่างที่ 2 หาจุดตัดโดยการแก้ระบบสมการ ดังนี้

จุดตัด (1, 3) หาได้โดยการแก้ระบบสมการ ดังนี้

$$2x + y = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + y = 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} ; x = 1$$

แทนค่า $x = 1$ ในสมการ $\textcircled{2}$

$$1 + y = 4$$

$$y = 3$$

ตัวอย่างที่ 2

จุดตัด (3, 1) หาได้โดยการแก้ระบบสมการ ดังนี้

$$x + y = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + 3y = 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} ; 2y = 2$$

$$y = 1$$

แทนค่า $y = 1$ ในสมการ $\textcircled{1}$

$$x + 1 = 4$$

$$x = 3$$

ตัวอย่างที่ 3

โจทย์ :

ในการตัดกางเกงและเสื้อสูท เพื่อขายส่งร้านจำหน่ายเสื้อผ้าจากผ้าที่มีอยู่ 60 เมตร ถ้ากางเกงแต่ละตัวใช้ผ้า 1.2 เมตร และเสื้อสูทแต่ละตัวใช้ผ้า 1.5 เมตร ช่างตัดเสื้อผ้าควรตัดกางเกงและเสื้อสูทอย่างละเท่าไรจึงจะได้เงินจากการขายมากที่สุด และจะได้เงินจากการขายมากที่สุดเท่าใด ถ้าช่างตัดเสื้อผ้าขายกางเกงตัวละ 150 บาท และเสื้อสูทตัวละ 180 บาท

วิธีทำ

กำหนดให้ จำนวนกางเกง x ตัว

จำนวนสูท y ตัว

ฟังก์ชันจุดประสงค์ คือ $P = 150x + 180y$



ตัวอย่างที่ 3

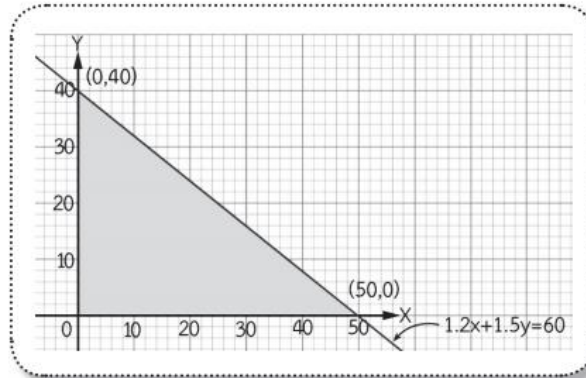
อสมการข้อจำกัดคือ

$$1.2x + 1.5y \leq 60 \text{ มีผ้าอยู่ } 60 \text{ เมตร}$$

$$x \geq 0 \text{ (จำนวนกางเกงไม่เป็นจำนวนลบ)}$$

$$y \geq 0 \text{ (จำนวนเสื้อสูทไม่เป็นจำนวนลบ)}$$

เขียนกราฟของอสมการข้อจำกัดได้ดังรูป



พิกัดของจุดมุมที่ได้จากอสมการข้อจำกัด คือ $(50, 0)$, $(0, 40)$ และ $(0, 0)$

ตัวอย่างที่ 3

แทนค่าฟังก์ชันของมูมดังกล่าวในฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 150x + 180y$

จุดมูม (x, y)	$P = 150x + 180y$
(0, 0)	0
(50, 0)	7,500 = ค่าสูงสุด
(0, 40)	7,200

ดังนั้น ช่างตัดเสื้อควรตัดเฉพาะกางเกง 50 ตัว จึงจะได้เงินจากการขายมากที่สุดเป็นเงิน 7,500 บาท

ตัวอย่างที่ 4

โจทย์ :

บริษัทผลิตผ้าเช็ดตัวแห่งหนึ่งได้ผลิตผ้าเช็ดตัวออกจำหน่ายแบบ A และแบบ B แบบ A ใช้เวลาตัดผืนละ 5 นาที ใช้เวลาเย็บผืนละ 10 นาที แบบ B ใช้เวลาตัดผืนละ 8 นาที ใช้เวลาเย็บผืนละ 8 นาที โดยบริษัทมีเวลาสำหรับการตัด 3 ชั่วโมง 20 นาที และเวลาสำหรับการเย็บ 4 ชั่วโมง ถ้าบริษัทได้กำไรจากการขายผ้าเช็ดตัวแบบ A ผืนละ 50 บาท และแบบ B ผืนละ 60 บาท บริษัทควรจะผลิตผ้าเช็ดตัวทั้งสองแบบนี้้อย่างละเท่าไร จึงจะได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ

กำหนดให้ จำนวนของผ้าเช็ดตัวแบบ A ที่ผลิตได้ x ผืน

จำนวนของผ้าเช็ดตัวแบบ B ที่ผลิตได้ y ผืน

ฟังก์ชันจุดประสงค์ คือ $P = 50x + 60y$



ตัวอย่างที่ 4

อสมการข้อจำกัดคือ

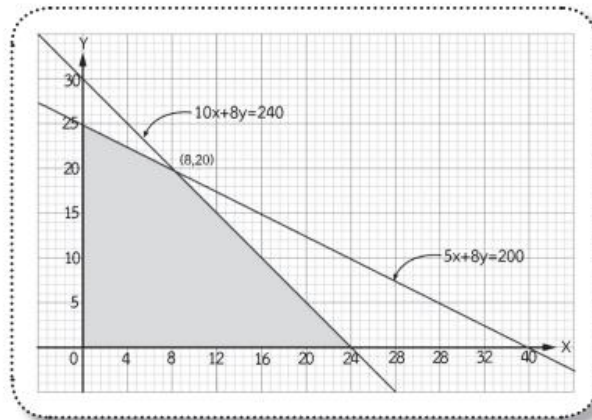
$$5x + 8y \leq 200 \text{ เวลาตัดไม้ไม่เกิน 3 ชั่วโมง 20 นาที (200 นาที)}$$

$$10x + 8y \leq 240 \text{ เวลาเย็บไม้ไม่เกิน 4 ชั่วโมง (240 นาที)}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

เขียนกราฟของอสมการข้อจำกัดได้ดังรูป





ตัวอย่างที่ 4

พิกัดของจุดมุมที่ได้จากอสมการข้อจำกัด คือ (0, 0), (0, 25), (24, 0) และ (8, 20)

แทนค่าพิกัดของมุมดังกล่าวในฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 50x + 60y$

จุดมุม (x, y)	$P = 50x + 60y$
(0, 0)	0
(0, 25)	1,500
(24, 0)	1,200
(8, 20)	1,600 = ค่าสูงสุด

ดังนั้น ผลิตผ้าเช็ดตัวแบบ A 8 ผืน และแบบ B 20 ผืน จึงจะได้กำไรสูงสุดเป็นเงิน 1,600 บาท

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 4 หาจุดตัดโดยการแก้ระบบสมการ ดังนี้

$$5x + 8y = 200 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$10x + 8y = 240 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} ; 5x = 40$$

$$x = 8$$

แทนค่า $x = 8$ ในสมการ $\textcircled{1} ; 5(8) + 8y = 200$

$$40 + 8y = 200$$

$$8y = 160$$

$$y = \frac{160}{8}$$

$$y = 20$$

ดังนั้น จุดตัดคือ (8, 20)

สรุป

กำหนดการเชิงเส้น เป็นการประยุกต์ของวิชาคณิตศาสตร์ที่นำไปใช้ทางธุรกิจเพื่อใช้หาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด ตามเงื่อนไขบังคับหรือข้อจำกัด ประกอบด้วย ฟังก์ชันจุดประสงค์ และอสมการข้อจำกัด

การหาคำตอบของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีใช้กราฟ มีขั้นตอนดังนี้

- 1) สร้างฟังก์ชันจุดประสงค์และอสมการข้อจำกัด ตามเงื่อนไขข้อจำกัดที่โจทย์กำหนด
- 2) เขียนกราฟของระบบสมการจากอสมการข้อจำกัด บริเวณที่แรเงาซึ่งสอดคล้องกับอสมการข้อจำกัด เรียกว่า **รูปหลายเหลี่ยมของบริเวณที่หาคำตอบได้**
- 3) หาพิกัดจากจุดมุมของรูปหลายเหลี่ยมของบริเวณที่หาคำตอบได้
- 4) แทนค่าพิกัดของจุดมุมของรูปหลายเหลี่ยมในฟังก์ชันจุดประสงค์ จุดมุมเป็นไปตามเงื่อนไข นั่นคือคำตอบของโจทย์ปัญหา